

## תרגול 5 בדידה להנדסה

21 בינואר 2015

**הבעת הפרש והפרש סימטרי באמצעות משלים:**

את ההפרש ניתן להביע כך:

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

בדקו שזה אכן מתקיים, לפי ההגדרות שלנו.

את ההפרש הסימטרי ניתן להביע כך:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

ולפי מה שאמרנו על הבעת הפרש באמצעות משלים נקבל:

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

ולפי דה-מורגן:

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$$

בתרגול הקודם דיברנו על הכלה דו-כיוונית כדרך להוכחת שיוויון בין קבוצות.

יש לנו דרך נוספת להראות שיוויון בין קבוצות - פעולות על קבוצות.

מה הכוונה? כמו שהראינו את השיוויון  $A\Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ . התחלנו עם קבוצה אחת  $(A\Delta B)$  והגענו לשנייה בעזרת פעולות שאנו מכירים כמותרות על הקבוצה שלנו.

אם נתבונן היטב, נראה שכל פעולה על קבוצות בעצם מבוססת על הכלה דו־כיוונית וגרירות לוגיות, אך בהרבה מצבים נתייחס לשיוויון כזה או אחר כברור ונוכל להשתמש בו ישירות.

לכן, הוכחת שיוויון דרך פעולות על קבוצות היא בעצם דרך הוכחה ברמת ה"מקרו", בלי לרדת לרמת ה"מיקרו" של הגרירות הלוגיות, שאנו יודעים שתמיד נמצאות מתחת לקרקע.

תרגיל:

הוכיחו את השוויון:

$$(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C^c \cap D) \cup (A^c \cap B) = B$$

לכל ארבע קבוצות  $A, B, C, D$ .

פתרון:

נתשמש בפעולות על קבוצות.

נזכור שאיחוד הוא חילופי, ולכן מדובר על:

$$(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B \cap C^c \cap D)$$

לפי הפילוג של איחוד וחיתוך,

$$(A \cap B) \cup (A^c \cap B) = B \cap (A \cup A^c)$$

ואנו יודעים ש- $A \cup A^c = U$ , ואם כן:

$$(A \cap B) \cup (A^c \cap B) = B \cap U = B$$

וכעת נקבל:

$$(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B \cap C^c \cap D) = B \cup (A \cap B \cap C^c \cap D)$$

כעת,  $B \supseteq (A \cap B \cap C^c \cap D)$  (החיתוך תמיד מוכל בכל אחת מהקבוצות הנחתכות), ולכן  $B \cup (A \cap B \cap C^c \cap D) = B$  (איחוד של קבוצה עם קבוצה המוכלת בה נותן את הקבוצה המכילה).

סה"כ, נקבל ש:

$$(A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B \cap C^c \cap D) = B \cup (A \cap B \cap C^c \cap D) = B$$

והוכחנו את הדרוש.

תרגיל:

הוכיחו:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

לכל שלוש קבוצות  $A, B, C$ .

פתרון:

הפתרון נמצא בקובץ "השלמה לתרגול ב-61-71 מה-11.32 של אלעד". הסתכלו בו והתפעלו.