# תרגיל 5 טופולוגיה תשע"ז

## תרגיל 5 טופולוגיה

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. תהי $X$ קבוצה. נגדיר: $\tau = \{O \subseteq X \mid |O^c| \geq \aleph_0\} \cup \{\emptyset, X\}$. הוכיחו או הפריכו: $\tau$ טופולוגיה על $X$.

2. (א) תהי $X$ קבוצה עם הטופולוגיה הקו-סופית. נניח שיש קבוצה $A \neq \emptyset, X$ שהיא סגורה. הוכיחו כי $X$ סופית.

   (ב) יהי $(X, \tau)$ מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא $X$. האם $(X, \tau)$ היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמא כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)

3. יהי $(X, \tau)$ מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

   (א) הטופולוגיה טריויאלית.

   (ב) לכל סדרה $x_n$ ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל מספר)

4. (א) יהי $X = \{a, b\}$ עם הטופולוגיה $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ (כזכור זהו מרחב Sierpiński). מצאו את כל הסדרות המתכנסות לאיבר אחד ואת כל הסדרות המתכנסות לשני איברים.

   (ב) תהי $X$ קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית. נניח ש $x_n$ היא סדרה שכל איבריה שונים. הוכיחו כי היא מתכנסת לכל $x \in X$. (הסיקו כי מרחב קו-סופי הוא מטריזבילי אם ורק אם הוא סופי).

5. תהי $f : (X, \tau_1) \to (Y, \sigma_1)$ פונקציה רציפה בין 2 מרחבים טופולוגיים. נניח כי $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ו $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$. הוכיחו כי

$$f : (X, \tau_2) \to (Y, \sigma_2)$$

היא גם רציפה. (על אותו עקרון, שימו לב לעובדה הבאה: כל פונקציה לתוך מרחב טריויאלי היא רציפה. כל פונקציה מתוך מרחב דיסקרטי היא רציפה).

6. הוכיחו: מרחב מטרי $X$ מקיים את תכונה $T_1$ אם ורק אם כל נקודון (קבוצה עם איבר אחד) היא קבוצה סגורה.

7. יהי $(X,\tau)$ מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A \subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ לפי:
$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$
הוכיחו כי $X$ קשירה אם ורק אם לכל $A \subset X$ הפונקציה $\chi_A$ אינה רציפה.

8. בשאלה הבאה נוכיח שקיימים אינסוף ראשוניים (ודאו עם עצמכם שאתם יודעים להוכיח זאת בדרך נוספת אחת לפחות).
עבור $a \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$ נגדיר סדרה חשבונית דו-צדדית באופן הבא: $S = a + d\mathbb{Z} = \{a + dk | k \in \mathbb{Z}\}$.
נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה הבאה: $O \in \tau$ אם ורק אם לכל $x \in O$ קיימת סדרה חשבונית דו-צדדית $S = x + d\mathbb{Z}$ המקיימת $S \subseteq O$.
   (א) הוכיחו שזו אכן טופולוגיה.
   (ב) הוכיחו שכל סדרה חשבונית דו-צדדית היא קבוצה סגוחה.
   (ג) הניחו בשלילה שאיחוד כל הסדרות שמתחילות ב$-0$ עם הפרשים ראשוניים הוא סופי והגיעו לסתירה.
   (ד) התפעלו.

9. על $\mathbb{Z}$ נגדיר את הטופולוגיה הבאה: $\tau = \{\emptyset, \mathbb{Z}\} \cup \{O_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, כאשר $O_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. הוכיחו שזהו מרחב טופולוגי שאינו מטריזבילי.