- כל מודול נוצר סופית הוא $\cong M_A = {}^{R^n}/_{AR^n}$
- כל מטריצה A דומה למטריצה $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$, $d_1 \mid \cdots \mid d_n$

$\Leftarrow$ כל מודול נוצר סופית הוא $\bigoplus {}^{R}/_{d_iR}$ סכום ישר של מודולים ציקליים.

משפטי יחידות

I) ההצגה $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \sim A$ קנונית היא יחידה עד כדי חברות.

II) $M \cong \bigoplus {}^{R}/_{d_iR}$, $d_1 \mid \cdots \mid d_n$, d_1 אינו הפיך $\Leftarrow$ d_i יחידים עד כדי חברות.

$\mathbb{F}$ שדה.
לומדים מ"ו מימד סופי מעל $\mathbb{F}$ עם אופרטור $T : V \to V$.

תזכורת: לכל אופרטור $T : V \to V$ יש מטריצות מייצגות ביחס לכל בסיס.

(מטריצות צמודות: $B = PAP^{-1}$)
כל המטריצות המייצגות של Y צמודות זו לזו
אופרטור = מחלקות צמידות של מטריצות.
$A \in M_n(F)$
$\mathbb{F}^n = V_A$ כמודול מעל $\mathbb{F}[x]$ על ידי

$$x \cdot v = Av \Leftrightarrow f(x) \cdot v = f(A) v$$

טענה

$V_A \cong V_B$ איזומורפיים $\Leftrightarrow$ A, B צמודות.

הוכחה

כל איזומורפיזם של מודולים הוא בפרט איזומורפיזם של מ"ו, כלומר כפל במטריצה הפיכה $v \overset{\varphi}{\mapsto} Pv$

מתי $\varphi(v) = Pv$ היא איזומורפיזם של מודולים?

$$PAv = \varphi(Av) = \varphi(xv) = x\varphi(v) = B\varphi(v) = BPv$$

$\Leftarrow$ $PaP^{-1} = B$

משפט(הוכחנו)

$$V_A \cong \mathbb{F}[x]^n / (xI-A)\mathbb{F}[x]^n$$

סיכום

V_A עד כדי איזומורפיזם
$\Leftrightarrow$ A עד כדי הצמדה
$\Leftrightarrow$ גורמי ההרכב של $xI-A$
$\Leftrightarrow$ $xI-A$ כד כדי דמיון
$\Leftrightarrow$ $\mathbb{F}[x]^n / (xI-A)\mathbb{F}[x]^n$ עד כדי איזומורפיזם

דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$xI - A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & -1 \\ -3 & x & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

...
לכן

$$V_A \cong \mathbb{F}[x]^3 / (xI-A)\mathbb{F}[x]^3 \cong \mathbb{F}[x]^3 / \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & x\left(x-i\right) \end{pmatrix} \mathbb{F}[x]^3 \cong \mathbb{F}[x] / x(x-2)^2\mathbb{F}[x]$$

המקרה הכללי

נניח $xI - A \sim \begin{pmatrix} d_1\left(x\right) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\left(x\right) \end{pmatrix}$. אזי

$$xI - A = P\left(x\right) \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} Q\left(x\right)$$

הערה: מכל כל חוג קומוטטיבי:

- אם P הפיכה אז $\det P$ הפיכה
- אם $P \in GL_n(R)$ אז $\det P \in U(R)$

$$\Leftarrow xI - A = P(x)\begin{pmatrix}\ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots\end{pmatrix}Q(x)$$

$$\Downarrow$$

$$|xI-A| = \overbrace{|P(x)|}^{\text{scalar}}\cdot\prod d(x)\cdot\overbrace{|Q(x)|}^{\text{scalar}}$$

$$\Leftarrow |xI-A| = \prod d_i(x)$$
$$\Leftarrow \sum \deg d_i = n$$

בנוסף

$$V_A \cong \mathbb{F}[x]^n/(xI-A)\mathbb{F}[x]^n \cong \mathbb{F}[x]^n/\begin{pmatrix}d_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(x)\end{pmatrix}\mathbb{F}[x]^n \cong$$

$$\cong \bigoplus \mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x]d_i(x) \cong \bigoplus V_{C(d_i)}$$

לכל d, $\mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x]g \cong V_{C(g)}$ כאשר $C(g)$ המטריצה המלווה של g: $\begin{pmatrix}0 & & & 1\\ 1 & \ddots & & 1\\ & \ddots & 0 & 1\\ & & 1 & 1\end{pmatrix}$[1]

לדוגמה, נניח ש

$$xI - B \sim \begin{pmatrix}1 & & \\ & x-2 & \\ & & x(x-2)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V_B \cong \mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x](x-2)$$

$$\mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x](x-2) \cong V_{\begin{pmatrix}2\end{pmatrix}} \oplus V_{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}}$$

$$\mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x](x-2) \cong V_{(2)}$$

---

[1]המטריצה המייצגת של פעולת הכפל בx

$$\mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x]x(x-2)$$

נחזור למקרה הכללי

$$g=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i x^i$$

פולינום מתוקן

$$\mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x]\cdot g=\operatorname{span}\left\{1,x,\dots x^{m-1}\right\}$$

המטריצה המלווה של g = $\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0\\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{m-1}\end{pmatrix}$ = המטריצה המייצגד של כפל בx

מסקנה

$$A\approx\bigoplus C\left(d_i\right)$$

($\approx$ - אומר שהמטריצות צמודות)

כאשר d_iגורמי ההרכב($xI-A\sim\begin{pmatrix}d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}$) של $xI-A$, וההצגה תלויה בA עד כדי צמידות..

הערה

$$|xI-A|=\prod d_i\left(x\right)$$

הערה

הפולינום המינימלי של A הוא d_n.

בעיה

כתוב נציג אחד מכל מחלקת צמידות של מטריצות עם פולינום אופייני x^4 ופולינום מינימלי x^2.

$$xI-A\sim\begin{pmatrix}d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & d_3 & \\ & & & d_4\end{pmatrix}$$

$$d_1\mid\cdots\mid d_4$$

$$d_1-x_4=x^4$$

$$d_4=x^2$$

הפתרונות הם

$$1\mid x\mid x\mid x^2\Rightarrow\begin{pmatrix}\boxed{0} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

$$1\mid 1\mid x^2\mid x^2\Rightarrow\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

$$C(x)=(0)$$

$$C\left(x^2\right)=\left(\begin{array}{c|c}0 & 0\\ 1 & 0\end{array}\right)$$

דוגמה נוספת

כתוב את כל מחלקות הצמידות של מטריצות 5×5 עם פולינום מינימלי $(x-1)(x-6)$

$$xI-A\sim\operatorname{diag}(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5)$$

$$1 \mid 1 \mid x-1 \mid (x-1)(x-6) \mid (x-1)(x-6) \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{\begin{matrix}0 & -6\\ 1 & 7\end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix}0 & -6\\ 1 & 7\end{matrix}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}6 & \\ & 6\end{pmatrix}$$

$$1 \mid 1 \mid x-6 \mid (x-1)(x-6) \mid (x-1)(x-6) \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{6} & & \\ & \boxed{\begin{matrix}0 & -6\\ 1 & 7\end{matrix}} & \\ & & \boxed{\begin{matrix}0 & -6\\ 1 & 7\end{matrix}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}6 & & \\ & 6 & \\ & & 6\end{pmatrix}$$

$$1 \mid x-1 \mid x-1 \mid x-1 \mid (x-1)(x-6) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \boxed{\begin{matrix}0 & -6\\ 1 & 7\end{matrix}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 6\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}6\end{pmatrix}$$

$$1 \mid x-6 \mid x-6 \mid x-6 \mid (x-1)(x-6) \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & & & \\ & 6 & & \\ & & 6 & \\ & & & \boxed{\begin{matrix}0 & -6\\ 1 & 7\end{matrix}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}6 & & & \\ & 6 & & \\ & & 6 & \\ & & & 6\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$$

$$C(x-1) = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$$

$$C(x-6) = \begin{pmatrix}6\end{pmatrix}$$

$$C((x-1)(x-6)) = \begin{pmatrix}0 & -6\\ 1 & 7\end{pmatrix}$$

הערה

נניח ש־f, g פולינומים זרים. אז $C(fg) \approx C(f) \oplus C(g)$

הוכחה

מספיק להוכיח שהמודולים המתאימים הם איזומורפיים

$$\mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x]fg, \qquad \mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x]f \oplus \mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x]g$$

הנ"ל אכן איזומופריים כחוגים לפי משפט השאריות הסיני, והן איזומורפיים כמודולים כי פעולת הכפל ב־x מתלכסת עם הכפל בחוג.

מסקנה

כל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ צמודה למטריצה יחידה מהצורה

$$\bigoplus C\left(p_i^{\alpha_i}\right)$$

כאשר כל הp_i אי־פריקים

הערה

$$C\left(\left(x-\lambda\right)^k\right) \approx J_k\left(\lambda\right) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

משפט(צורות ז'ורדן)

כל מטריצה A שהפולינום המינימלי שלה מתפצל לגורמים לינאריים, צמודה למטריצה יחידה (עד כדי סדר) מהצורה

$$\bigoplus J_{k_i}\left(\lambda_i\right)$$