תרגיל 3

1) נניח ש- $\mu_1,\mu_2,\mu_3\dots$ הינן מידות על מרחב מדיד (X,S)
וכן ש- $\mu_n(A)\underset{n\to\infty}{\nearrow}$ (כסדרה עולה עם n) לכל $A\in S$

ונגדיר: $\mu(A):=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(A)$

האם μ הינה מידה? אם לא - תנו דוגמא נגדית!

2) נניח כי A הינה מדידה לבג ב $\mathbb{R}$ ונגדיר:

$$B:=\bigcup_{x\in A}[x-1,x+1]$$

הוכיחו כי B מדידה לבג.

3) נניח ש: m הינה מידת לבג, ו- $A\subseteq\mathbb{R}$ הינה קבוצה
מσ אלגברת בורל של $\mathbb{R}$, כך ש $m(A)>0$

הוכיחו כי אם

$$B:=\{x-y \mid x,y\in A\}$$

אזי B מכילה קטע פתוח לא ריק סביב 0.

4) לכל $x\in[0,1)$ קיים פיתוח יחיד: $0.x_1x_2x_3\dots$
לפי בסיס עשרוני ($x_i\in\{0,\dots,9\}$).

נגדיר: $A:=\left\{x \;\middle|\; \begin{array}{l} x\in[0,1) \\ x_8=7 \end{array}\right\}$

א) מהי המידה החיצונית של A?

ב) האם A מדידה לבג?