<u>אלגברה מופשטת 2 – תרגול 5</u>

משפט האיזומורפיזם הראשון:

יהי $f:R\to S$ הומומורפיזם אזי $R/\ker f\cong \operatorname{Im} f$.

דוגמאות:

1. עבור R חוג קומוטטיבי. נביט בפונקציה $\varphi_a:R[x]\to R$ המקיימת $\varphi_a(f(x))=f(a)$ לכל $f(x)\in R[x]$. זהו אפימורפיזם [הוכחה: תרגיל בית]. הגרעין הוא כל הפולינומים ש a שורש שלהם. עבור $a=0$ הגרעין הוא כל הפולינומים שהמקדם החופשי שלהם הוא 0, כלומר $\ker\varphi_0=<x>$, מכאן מקבלים ש $R[x]/<x>\cong R$.
2. האם בהכרח מתקיים $\ker\varphi_a=<x-a>$? כן. ההעתקה $\psi:R[x]\to R[x]$ המוגדרת ע"י $\psi(1)=1,\psi(x)=x-a$ היא איזומורפיזם, ומתקיים 0 הוא שורש של $f\in R[x]$ אם ורק אם a שורש של $\psi(f)$. האידאל $<x>$ מועתק ל $<x-a>$. השרשרת $R[x]\xrightarrow{\psi^{-1}}R[x]\xrightarrow{\varphi_0}R$ היא בדיוק הצבת a. אבל הגרעין של ההעתקה הוא בדיוק $<x-a>$.
3. באופן דומה ניתן להראות ש $R[x,y]/<y>\cong R[x]$.
4. כל פולינום ב- $R[x]$ ניתן לזהות עם פונקציה $f(x):R\to R$, וניתן להגדיר חוג פונקציות $S=R^R$ (כל הפונקציות מ R ל R), עם פעולת כפל fg היא פונקציה המוגדרת ע"י $fg(x):=f(x)g(x)$ וחיבור $f+g$ המוגדר ע"י $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ (מיהו איבר היחידה, ומיהו איבר האפס, הוכיחו שזה חוג). קיבלנו הומ' $\varphi:R[x]\to S$. שימו לב: זהו אינו בהכרח שיכון, לדוג' אם $R=\mathbb{Z}_2$ אזי $\varphi(x^2-x)=0$. בנוסף φ אינו בהכרח על. $R=\mathbb{R}$ אזי לפונקציה $e^x\in S$ אין מקור (מדוע?). לפי איזו' 1 נקבל $R[x]/Ker\varphi\cong \operatorname{Im}\varphi$ הגרעין הוא כל הפולינומים שכל הצבת ערך מ R נותנת 0. נסמן $\operatorname{Im}\varphi=P(R)$ ונקרא לחוג זה חוג הפונקציות הפולינומיאליות.

תרגיל: יהיו $I \subseteq J$ אידיאלים של R. הוכח כי קיים אפימורפיזם $R/I \to R/J$.

הוכחה: נגדיר $f: R/I \to R/J$ לפי $f(r+I)=r+J$. נראה כי הפונקצייה מוגדרת היטב. נניח $r+I=s+I$. אזי $r-s \in I$. מכיוון ש $I \subseteq J$, מתקיים $r-s \in J$, ולכן $r+J=s+J$.

נראה כי היא שומרת חיבור (כפל יהיה לבית).

$f((r+I)+(s+I)) = f((r+s)+I) = (r+s)+J = (r+J)+(s+J)$.

לכל $r+J$ יש מקור והוא $r+I$, ולכן הפונקצייה היא על.

הגדרה: $R \neq I \lhd R$ הוא אידיאל מקסימלי אם לא קיים $R \neq J \lhd R$ כך ש $I \subset J$.

דוגמאות:

1. ב $\mathbb{Z}_{45}$ האידיאלים המקסימליים הם $3\mathbb{Z}_{45}$ ו $5\mathbb{Z}_{45}$.
2. ב $\mathbb{Z}_{32}$ האידיאל המקסימלי היחיד הוא $2\mathbb{Z}_{32}$.
3. בחוג עם חילוק, אין אידיאלים לא טריוויאלים, ולכן אידיאל האפס הוא מקסימלי.
4. לכל ראשוני p, $p\mathbb{Z}$ הוא אידיאל מקסימלי של $\mathbb{Z}$.
5. עבור R חוג קומוטטיבי, $<x> \lhd R[x,y]$ איננו מקסימלי, משום שישנו למשל האידיאל $J=\{f(x,y): f(0,0)=0\}$ שמכיל אותו ממש.
6. עבור F שדה, בחוג $F[[x]]$ ישנו אידיאל מקסימלי אחד $<x>$ (ראינו שהאידיאלים בחוג הם $<x^i>, i \geq 1$).

תרגיל: יהי $f: R \to S$ אפימורפיזם ויהי אידיאל אמיתי (Proper ideal) $I \lhd R$ המכיל את הגרעין אז גם $f(I) \lhd S$ הוא אידיאל אמיתי.

הוכחה: [זה שהוא בכלל אידיאל נשאיר כתרגיל בית] נניח בשלילה כי $I \lhd R$ אידיאל אמיתי וכי $f(I)=S$. ניקח איבר $x \in R \setminus I$. מכיוון ש $f(I)=S$, קיים איבר $y \in I$ כך ש $f(y)=f(x)$. כעת, $x=y+(x-y)$. אולם $x-y \in \ker f \subseteq I$ ולכן $x \in I$ וזו סתירה.

הערה: אם האידאל I אינו מכיל את הגרעין אז הטענה אינה נכונה. לדוגמא $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$; הגרעין הוא $2\mathbb{Z}$. אם ניקח $3\mathbb{Z}$ אז $f(3\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_2$ שאינו אידאל אמיתי.

מסקנה-תרגיל: יהי $f: R\to S$ אפימורפיזם ויהי $I \triangleleft S$. הוכח כי אם I מקסימלי אזי $f^{-1}(I)$ מקסימלי.

הוכחה: נניח בשלילה כי קיים אידיאל ביניים $f^{-1}(I)\subset P\triangleleft R$.

$f^{-1}(I)\supseteq f^{-1}(\{0\})=\ker f$ ולכן גם P מכיל את הגרעין, ולכן $f(P)\triangleleft R$ הוא אידיאל אמיתי. כמו-כן, $f(P)$ הוא מכיל ממש את I כי $f^{-1}(I)$ כבר כולל את כל האיברים הנשלחים ל I, ומכיוון ש P מכיל ממש את $f^{-1}(I)$, הוא חייב להכיל איברים שלא נשלחים ל I. משמע, יש אידיאל ביניים $I\subset f(P)\triangleleft S$, ולכן I לא מקסימלי.

משפט: יהיה חוג R. $R\neq I\triangleleft R$ מקסימלי אם ורק אם R/I חוג פשוט. אם R קומוטטיבי אזי $R\neq I\triangleleft R$ מקסימלי אם ורק אם R/I שדה.

דוגמה:

$<x,p>\triangleleft \mathbb{Z}[x]$ הוא אידיאל מקסימלי לכל ראשוני p משום ש $\mathbb{Z}[x]/<x,p>\cong\mathbb{Z}_p$ הוא שדה. כדי להסביר את האיזומורפיזם הנ"ל, ניתן להשתמש במשפט איזו' 3 או להוכיח ישירות.