התפלגות מעריכית (אקספוננציאלית)

מתארת בד"כ תקופות רדיואקטיביות.

(או קצב הדעיכה)

$\lambda>0$ פרמטר הנקרא/ קבוע הדעיכה.

פונ' הצפיפות של מ"מ X המתפלג מעריכית:

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$X\sim exp(\lambda)$$

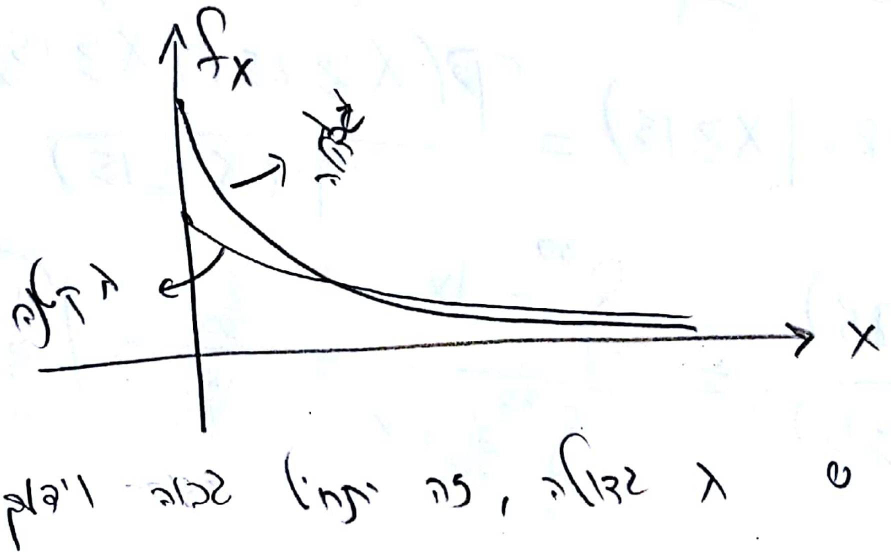
הסבר לפונ' הצפיפות:

עבור דעיכה מעריכית $x\geq0$ נרצה $f_X(x)=\underbrace{C}_{\text{קבוע}}\cdot e^{-\lambda x}$

נראה כעת כי $C=\lambda$.

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}Ce^{-\lambda x}dx=\frac{Ce^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_0^{\infty}=0-\frac{C}{-\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{C=\lambda}$$



ככל ש λ גדולה, פה יתחיל גבוה ויפול מהר יותר.

Scanned by CamScanner

2

ב.

תכונת חוסר הזיכרון של פונ' הצפיפות המעריכית

טענה: אם $X \sim exp(\lambda)$ אז

$$P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s)$$

במילים אחרות, אם חומר רדיואקטיבי מתפרק בקצב מעריכי ואנו מחכים t יחידות זמן להתפרקות "ראשונה" אז:
אם חיכינו t יחידות זמן ועדיין לא הייתה התפקות אז אם נחכה $t+s$ יחידות להתפרקות, ההסתברות שווה להסת' שנחכה s יחידות זמן.

(פונ' חלון)

הוכחה: לכל v

$$P(X > v) = \lambda \int_v^\infty e^{-\lambda x} dx$$

$$= \cancel{\lambda} \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\cancel{\lambda}} \Big|_v^\infty = \boxed{e^{-\lambda v}}$$

= ההסתברות של "הזנב"

$$P(X > t+s \mid X > t) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

פונ' הצטברות ש מ"מ מעריכי

$$F_X(t) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

שכן

$$\int_{-\infty}^{t} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \frac{\cancel{\lambda} e^{-\lambda x}}{-\cancel{\lambda}} \Big|_{0}^{t} = -e^{-\lambda t} + 1$$

תוחלת:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

הוכחה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{v'} dx \overset{\text{אינט' בחלקים}}{=} \cancel{x \cdot \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \Big|_{0}^{\infty}} - \int_{0}^{\infty} \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx$$

$$= -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_{0}^{\infty} = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$$

השונות:

$$V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

הוכחה: עבור $E[X^2]$ נחשב $\int x^2 f_X(x) dx$

(בעזרת אינט' בחלקים פעמיים)

3

תרגיל:

משך זמן (בשעות) הדרוש לתיקון מכונה הוא מ"מ המתפלג מעריכית עם ממוצע (תוחלת) 1/2 שעה.

א. חשב את ההס' שזמן התיקון יעלה על שעתיים.

ב. " " " " " על 10 שעות בהינתן שהוא מעל 9 שעות.

ג. מהי תוחלת זמן התיקון והשונות?

פתרון: א. נסמן ב-X זמן תיקון המכונה.

$$f_X(x)=2e^{-2x}$$

$$P(X>2)=\int_2^{\infty}2e^{-2x}dx=-e^{-2x}\Big|_2^{\infty}=\boxed{e^{-4}}$$

ב. תכונת חוסר הזיכרון

$$P(X>10\mid X>9)=P(X>1)=\int_1^{\infty}2e^{-2x}dx$$

$$=-e^{-2x}\Big|_1^{\infty}=\boxed{e^{-2}}$$

ג.

$$E[X]=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$V[X]=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{(1/2)^2}=4$$

1

הרצאה 10 מבוא לסטטיסטיקה

התפלגות נורמלית

(התפלגות Z)

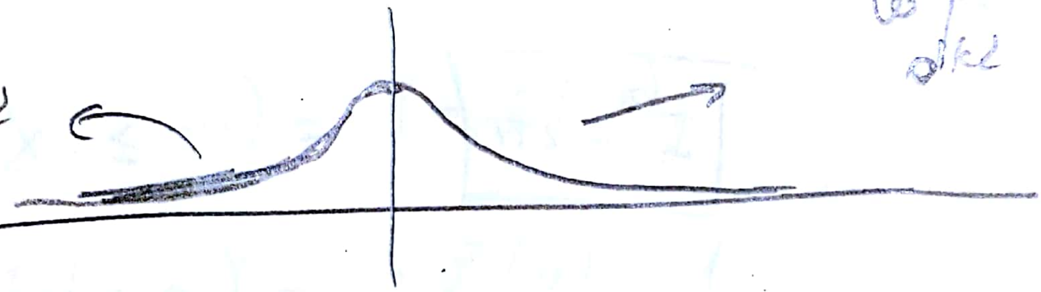
פונ' צפיפות נורמלית / גאוסית

גאוסית תקנית (נורמלית תקנית) סטנדרטית

$$f_X(x) = c \cdot e^{-x^2/2}$$

עקומת הפעמון של גאוס

גאוסיין



דוגמאות - גובה אדם
- ציונים

נחשב את c:

$$1 = c \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx}_{\text{נסמן } I}$$

נחשב את I^2

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy$$

בסה"כ שם אחר למשתנה

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)} dx\,dy =$$

מעבר לקואו' פולרי r, θ

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2/2} \, dr$$

היעקוביאן "מציל אותנו" =

$$= \int_0^{2\pi} \left(-e^{-r^2/2}\right)\Big|_0^{\infty} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta = \boxed{2\pi}$$

$$\boxed{I^2 = 2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = c \cdot \sqrt{2\pi} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

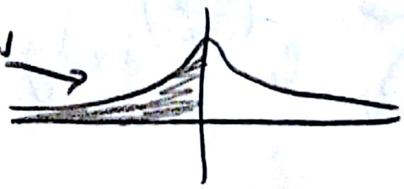
$$\Rightarrow \boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cancel{\int_{-\infty}^{\infty}} e^{-x^2/2}}$$

נגדיר:

$$\boxed{\Phi(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \, dy}$$

פונ' התפלגות מצטברת

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \longleftrightarrow$$ מסימטריה



② את הערכים של Φ נקבל מטבלת הערכים.
הנקראת טבלת Z.

$$\boxed{P(a<X<b)=\Phi(b)-\Phi(a)}$$

$\boxed{a\geq 0}$

$$P(X\geq a)=1-\Phi(a)$$

$$P(X\leq -a)=1-\Phi(a)$$

$$P(|Z|\leq a)=2\Phi(a)-1$$

נאמר אם כן כי X מתפלג נורמלית סטנדרטי

$$\boxed{X\sim N(0,1)}$$

פונ' צפיפות נורמלית כללית

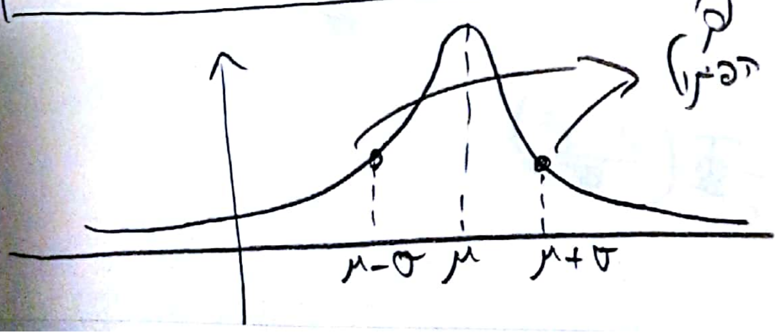
$$\boxed{f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2}}$$

פרמטרים $\mu\in\mathbb{R}$

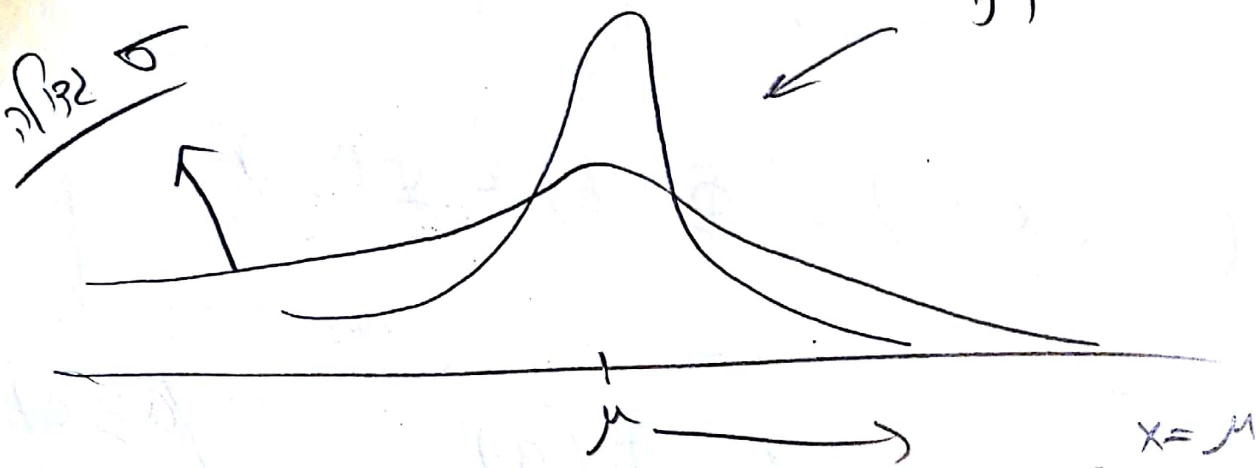
$\sigma>0$

μ - תוחלת ← המרכז

σ - סטיית התקן ← מתיחה/כיווץ



$$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$



$x=\mu$
מקס׳

שים $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \leq 1$!1- מתקבל ב $\mu=x$.

נוסחת התקנון

לצורך החישובים נעביר את הכל לנורמלי הסטנדרטי.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

לכל $a<b$

$$P(a<X<b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \quad u = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \text{נציב}$$

$$du = \frac{dx}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \cancel{\sigma}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

(3)

לסיכום

$Z \sim N(0,1)$

משתנה מקרי עזר

$$P(a<X<b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$ מהטבלה

דוגמא: עבור $\mu = 174$ $\sigma = 6$

$$P(170<X<190) = \Phi\left(\frac{190-174}{6}\right) - \Phi\left(\frac{170-174}{6}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{16}{6}\right) - \Phi\left(\frac{-4}{6}\right) = 0.9962 - \left(1-\Phi\left(\frac{2}{3}\right)\right) =$$

$$= 0.9962 - (1-0.7454) = \boxed{0.7416}$$

Scanned by CamScanner