תרגיל 6

1. יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma)$ שני מרחבים טופולוגים כך ש־Y בעל תכונה T_2. תהנה $f,g:X\to Y$ פונקציות רציפות ומזדהות על תת קבוצה צפופה A של X. הוכיחו כי $f=g$.
הפריכו את הטענה הקודמת על Y שאינו מקיים T_2.

2. אם $A,B\subseteq X$ קשירות, הוכיחו או הפריכו:
   (א) הפנים של A קשיר
   (ב) $A\cup B$ קשיר
   (ג) $A\cap B$ קשיר

3. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי קשיר. נקודה חוצה היא נקודה $x\in X$ כך ש־$X\setminus\{x\}$ לא קשירה. הוכיחו שאם $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ הומיאומורפיזם, אז x חוצה אם ורק אם $f(x)$ חוצה.
השתמשו בתוצאה זו כדי למיין את הקטעים (פתוחים\סגורים\שאר האפשרויות) עד כדי הומאומורפיזם.

4. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ו־$Y\subseteq X$. אם $\overline{Y}=X$ (כלומר Y צפופה ב־X) ו־Y קשיר, אז גם X קשיר. הסיקו שרכיבי הקשירות הם סגורים

5. הוכיחו או הפריכו: $SO_n(\mathbb{R})$, כלומר מרחב המטריצות A שמקיימות $AA^T=I$, הוא קשיר.

6. מתי הטופולוגיה הקו־סופית קשירה? הוכיחו שאם X מעוצמה גדולה או שווה לעוצמת הרצף אז היא קשירה מסילתית.

7. יחסית קל להוכיח שאם פונקציה אנליטית $f:\Omega\to\mathbb{C}$ מתאפסת על סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\Omega$ שמתכנסת ל־$x\in\Omega$ אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$f_{|B(x,\varepsilon)}\equiv 0$. הראו שבנסיבות כאלה כש־$\Omega$ תת קבוצה קשירה של $\mathbb{C}$ אז מתקיים ש־$f\equiv 0$.

8. הוכיחו שאם (X,τ) מקיים את T_2 ולכל $x\in X$ ו־$x\in U\in\tau$ קיימת $x\in V\in\tau$ כך ש־$V\subseteq U$ ו־V סגוחה אז X בלתי קשיר לחלוטין. הסיקו שכל מרחב אולטרה־מטרי הוא בלתי קשיר לחלוטין

הערה: למרחב שמקיים את התנאי הזה קוראים מרחב ממימד אפס.
הערה 2: כדי להוכיח את הטענה שלנו, מספיק שהמרחב יקיים את T_0 אבל לא ניכנס לזה כרגע.

9. נסתכל על טופולוגיית סורגנפרי τ_s על $\mathbb{R}$ שמוגדרת כאיחוד של כל הקטעים מהצורה $[a,b)$, כלומר

$$\tau_s := \Big\{ \bigcup_{i\in I}[a_i,b_i) \mid \forall i\in I : a_i,b_i\in\mathbb{R} \Big\}$$

(א) הראו שהטופולוגיה הזו בלתי קשירה לחלוטין

(ב) הסיקו שכל פונקציה רציפה $f:\left(\mathbb{R},\tau_{|*|}\right)\to(\mathbb{R},\tau_S)$ מהטופולוגיה האוקלידית הינה קבועה.

(ג) מה היחס בינה ובין הטופולוגיה האוקלידית?

(ד) הראו שהיא ספרבילית

10. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ תת קבוצה. הוכיחו ש־$\mathbb{R}\setminus A$ היא בלתי קשירה לחלוטין אם ורק אם A צפופה.

11. אנחנו נגיד שהמרחב (X,τ) קשיר מקומית ב־$x\in X$ אם לכל סביבה $U\in N(x)$ קיימת $V\in N(x)$ קשירה כך ש־$V\subseteq U$. אם זה נכון לכל $x\in X$ אז נגיד ש־X קשיר מקומית. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה)

12. תנו דוגמה של תת מרחב של $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית

13. השלימו את הטבלה

מרחב טופולוגי	קשיר	קשיר מקומית	קשיר מסילתית	בלתי קשיר לחלוטין
המרחב הדיסקרטי				
הטופולוגיה הטריוויאלית				
$\mathbb{R}^n$				
$[0,1]$				
$(\mathbb{Z}, d_p)$				
$(\mathbb{Q}, d_p)$				
$(\overline{\mathbb{Z}}, d_p)$				
$(\overline{\mathbb{Q}}, d_p)$				
l_1				
l_2				
l_∞				
$(C[0,1], d_\infty)$				
$(C[0,1], d_1)$				
$(\{a,b\}, \tau_{\text{Sierpiński}})$				
(X, τ_{cof}) עבור X אינסופי				
(X, τ_{coc}) עבור X לא בן מניה				
$([0,1]^2, <_{lex}, \tau_{<_{lex}})$				
$(\mathbb{R}, \tau_s)$				
סינוס טופולוגי				