ב.ד.ד.ה

מבחן לדוגמה תשע״ז ב׳

(1) • $f(x)=x^2$ <u>אינה</u> כופלת.

דוגמה: יהי $x_1=0$. לא קיים $x_2\in\mathbb{R}$

כך ש- $x_1\neq x_2$ וגם $\underbrace{f(x_1)}_{=0}=f(x_2)$

(כי רק עבור $x_2=0$ מתקיים $f(x_1)=f(x_2)$).

• $g(x)=\sin x$ היא כופלת. הוכחה:

יהי $x_1\in\mathbb{R}$. צ״ל שקיים $x_2\in\mathbb{R}$ כך

ש- $x_1\neq x_2$ ו- $\sin(x_1)=\sin(x_2)$.

יהי $x_2=x_1+2\pi$. אז $x_2\in\mathbb{R}$, $x_2\neq x_1$

ו- $\sin(x_1)=\sin(x_1+2\pi)=\sin(x_2)$. כלומר $g(x_1)=g(x_2)$

(זה נובע מכך ש- $\sin x$ פונקציה מחזורית

עם מחזור $2\pi$).

• $h(x)$ היא כופלת. הוכחה: יהי $x_1\in\mathbb{R}$.

נחלק ל- 2 מקרים: I $x_1\notin\mathbb{Q}$ ; II $x_1\in\mathbb{Q}$.

<u>מקרה I</u>: אם $x_1\notin\mathbb{Q}$ הרי ש- $h(x_1)=0$. ניקח את

$x_2=0$. $x_1\neq x_2$ (כי $x_2=0$ הוא רציונלי) ומתקיים

$h(x_1)=h(x_2)=x_2^2=0$.

מקרה II: אם $x_1\in\mathbb{Q}$, נבדיל בין 2 מקרים.

(א) $x_1=0$ ; (ב) $x_1\neq 0$.

במקרה (א) למעשה כבר טיפלנו: $h(0)=0$

וזה שווה ל- $h(x_2)$ לכל $x_2\notin\mathbb{Q}$.

מקרה (ב): אם $x_1\neq 0$ הרי ש- $x_2=-x_1\neq x_1$.

ואז: $h(x_2)=x_2^2=(-x_1)^2=x_1^2$
$=h(x_1)$

בכל מקרה מצאנו $x_2\in\mathbb{R}$ כך ש- $x_1\neq x_2$

ו- $\cancel{f(x_1)\neq f(x_2)}$ . $h(x_1)=h(x_2)$

מיותר לדוגמה
תשובה קצר

(2) (א) הטענה לא נכונה.

דוגמה נגדית: $A=\{1\}$

$B=\{2\}$

$$P(A)\cup P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$$

$$P(A\cup B)=P(\{1,2\})=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

לכן $P(A)\cup P(B)\neq P(A\cup B)$

(ב) הטענה $(A\setminus B)\cup C=(A\cup C)\setminus(B\setminus C)$

נכונה. הוכחה:

$\subseteq$ יהי $x\in(A\setminus B)\cup C$. אז $x\in A\setminus B$ או $x\in C$.

<u>מקרה I</u>: $x\in A\setminus B$. אז $x\in A$ וגם $x\notin B$.

לכן $x\in A\cup C$ ו- $x\notin B\setminus C$ (כי $x\notin B$).

קיבלנו: $x\in(A\cup C)\setminus(B\setminus C)$.

<u>מקרה II</u>: $x\in C$. אז $x\in A\cup C$,

וכמו כן $x\notin B\setminus C$ (כי $x\in C$).

קיבלנו: $x\in(A\cup C)\setminus(B\setminus C)$

$\supseteq$ יהי $x\in(A\cup C)\setminus(B\setminus C)$. אז $x\in A\cup C$

וגם $x\notin B\setminus C$

עלינו להראות ש- $x \in (A\setminus B)\cup C$.

אם $x\in C$ אין מה להראות. נניח, אם כן, ש- $x\notin C$, ואז בהכרח $x\in A$.

~~בנוסף $x\in A$, $x\notin B$ ו- $x\notin C$~~

(כי $x\in A\cup C$). נסביר מדוע בהכרח $x\notin B$: מההנחה $x\in (A\cup C)\setminus(B\setminus C)$ נזכר $x\notin B\setminus C$. כעת הנחנו $x\notin C$. לכן בהכרח $x\notin B$.

הראינו הכלה בשני הכיוונים לכן הקבוצות שוות.

(ג) נתחיל בכיוון הקל:

אם $A\subseteq B$ אז $A\setminus B=\emptyset$, וודאי ש- $A\setminus B\subseteq B\setminus A$.

בכיוון השני, נניח ש- $A\setminus B\subseteq B\setminus A$ ונראה ש- $A\subseteq B$. יהי $x\in A$. נניח בשלילה ש- $x\notin B$. אז נקבל: $x\in A\setminus B$ ו- $x\notin B\setminus A$, בסתירה להנחה. לכן בהכרח $x\in B$. הראינו שאם $x\in A$ אז $x\in B$, כלומר $A\subseteq B$.

הראינו גרירה בשני הכיוונים ולכן "אם ורק אם" נכונה.

(3) נוכיח באינדוקציה על n (אינדוקציה שלמה):

עבור n=1: $3\cdot 2^0 + 2\cdot(-1)^1 = 3-2 = 1 = a_1$

הנחה קודמת: $a_n = 3\cdot 2^{n-1} + 2\cdot(-1)^n$

וגם: $a_{n-1} = 3\cdot 2^{n-2} + 2\cdot(-1)^{n-1}$

נוכיח ש: $a_{n+1} = 3\cdot 2^n + 2\cdot(-1)^{n+1}$

לפי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$

$$= \underbrace{3\cdot 2^{n-1} + 2\cdot(-1)^n}_{a_n} + 2\cdot\underbrace{\left[3\cdot 2^{n-2} + 2\cdot(-1)^{n-1}\right]}_{a_{n-1}}$$

$$= \left(\frac{3}{2} + 2\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot 2^n + 2\cdot(-1)^n + 4\cdot(-1)^{n-1}$$

$$= 3\cdot 2^n + \underbrace{2\cdot(-1)^n + 2\cdot(-1)^{n-1}}_{\text{אלו 2 מספרים נגדיים כי ל- n ול- n-1 זוגיות שונה}} + 2\cdot\underbrace{(-1)^{n-1}}_{=(-1)^{n+1}}$$

$=(-1)^{n+1}$ כי ל- n-1 ול- n+1 יש את אותה זוגיות

$$= 3\cdot 2^n + 2\cdot(-1)^{n+1}$$

(4) (א) לא בהכרח. (f קודמת חח"ע. g חח"ע הזוגיים אך לא חח"ע האי-זוגיים).

דוגמה נגדית: $f(n)=n$ לכל $n$.

$$g(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n \text{ זוגי} \\ 1 & n \text{ אי זוגי}\end{cases}$$

לדוגמה: $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f(4)=4$, ...

$g(1)=1$, $g(2)=1$, $g(3)=1$, $g(4)=2$

אז $f$ חח"ע ($f$ היא פונקציית הזהות).

$f(n)=g(2n)$ כי $2n$ מספר זוגי ואז

$$g(2n)=\frac{2n}{2}=n=f(n)$$

אך $g$ לא חח"ע: $g(1)=g(2)$

(ב) הוכחה: נניח ש- $f$ היא על.

יהי $m\in\mathbb{N}$. נראה שקיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $g(k)=m$.

כיוון ש- $f$ על, קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $f(n)=m$.

מהנתון, $f(n)=g(2n)$. אז $g(2n)=m$.

כלומר עבור $k=2n$, $g(k)=m$.

הראינו שלכל $m\in\mathbb{N}$ קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $g(k)=m$. זה מוכיח ש- $g$ על.

(ג) נוכיח את הטענה.

הרעיון: אם $g$ חח"ע אז התמונה של $f$ תהיה התמונה של זוגיים עבור הפונקציה $g$. אז תמונה (לפי $g$) של מספר אי זוגי (למשל 1) לא תהיה בתמונה של $f$.

נניח ש- $g$ חח"ע ונראה ש- $f$ איננה על.

בפרט, נסמן $g(1)=k\in\mathbb{N}$. נראה שלא קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $f(n)=k$. נניח בשלילה שכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $f(n)=k$. אז לפי הנתון $f(n)=g(2n)$ ולכן: $g(2n)=k$. כלומר $g(1)=g(2n)$. מהנתון ש- $g$ חח"ע נקבל $1=2n$ עבור $n\in\mathbb{N}$ - סתירה. לכן לא קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $f(n)=k$, ו- $f$ איננה על.

(5) (א) זו בעיית בחירה עם חזרות ובלי חשיבות

לסדר. בוחרים 10 פעמים, עם חזרות,

מתוך 3 פריטים $(x_1, x_2, x_3)$, בלי חשיבות לסדר.

מספר האפשרויות הוא: $\binom{3-1+10}{3-1} = \binom{12}{2}$

$= \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$

(ב) זהו מספר הפתרונות של $x_1 + x_2 + x_3 = 10$

כך ש: $x_i \geq 1$ לכל $i$.

זה כמספר הפתרונות של $y_1 + y_2 + y_3 = 7$

ללא תנאים על $y_i$.

מספר הפתרונות (בחירה עם חזרות ובלי חשיבות

לסדר של 7 פריטים מתוך 3):

$\binom{2+7}{2} = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$

~~(ג) נשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה~~

~~נסמן $A_1$ - קבוצת הפתרונות שבהם $x_1 \geq 3$~~

5) ג) נמנה את הפתרונות הפסולים (פתרונות שבהם $x_1 \ge 3$), ונחסר אותם מהתשובה של (א).

מספר הפתרונות של $x_1+x_2+x_3=10$ שבהם $x_1 \ge 3$ הוא כמספר הפתרונות של $y_1+x_2+x_3=7$ (תחת הסימון: $x_1=3+y_1$).

זה בדיוק מה שקיבלנו בסעיף (ב).

לכן סה"כ הפתרונות שבהם $0 \le x_1 \le 2$ הוא

$$\binom{12}{2}-\binom{9}{2}=66-36=30$$