הרצאה 23

7 בינואר 2014

Ω תחום פשוט
$f\in E\left(\Omega\right)$
$\exists A_{1},..,A_{k}\subset\Omega$ כך ש־A_{j} קומפקטית
M_{k} C^{r}־משטח, $A_{k}\subset M_{k}$
$\Omega\subset P$
$f\left(x\right)\chi_{\Omega}\left(x\right)$ ־ אי רציפות ב־$A_{1}\cup...\cup A_{k}$ וגם ב־$\partial\Omega$, ולכן $f\chi_{\Omega}$ אינטגרבילית ב־P.

משפט של Fubini

$\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{m}$
$\mathbb{R}^{n+m}\ni x=\left(x',x''\right):x'\in\mathbb{R}^{n},x''\in\mathbb{R}^{m}$
P קטע $n+m$ מימדי
$P=P'\times P''$
$P=\prod_{j=1}^{n+m}\left[a_{j},b_{j}\right]=\prod_{j=1}^{n}\left[a_{j},b_{j}\right]\times\prod_{j=n+1}^{m+n}\left[a_{j},b_{j}\right]$
אם $\mathscr{P}$־חלוקה של P אז $\mathscr{P}=\left\{ P_{ij}:P_{ij}=P_{i}'\times P_{j}'';\mathscr{P}'=\left\{ P_{i}'\right\} ,\mathscr{P}''=\left\{ P_{j}''\right\} \right\}$ כאשר $\mathscr{P}',\mathscr{P}''$ חלוקות של P',P'' בהתאמה.
$P=P'\times P''\Rightarrow\mathscr{P}=\mathscr{P}'\times\mathscr{P}''$

משפט (Fubini)

$\mathbb{R}^{n+m}\supset P=P'\times P''$
תהי $f\in\mathscr{R}\left(P\right)$, נניח שלכל $x'\in P'$ הפונקציה $P''\ni x''\to f\left(x',x''\right)$ אינטגרבילית ב־P'' ונגדיר $\Phi\left(x'\right)=\int_{P''}f\left(x',x''\right)dx''$.
אז $\Phi\in\mathscr{R}\left(P'\right)$ ו־$\int_{P'}\Phi\left(x'\right)dx'=\int_{P}f\left(x\right)dx$
כלומר $\int_{P'}\left(\int_{P''}f\left(x',x''\right)dx''\right)dx'=\int_{P=P'\times P''}f\left(x\right)dx$

הוכחה

נקח חלוקה $\mathscr{P}'$ של P'

$$\overline{S}\left(\Phi,\mathscr{P}'\right)=\sum_{i=1}^{N}\sup_{x'\in P_{i}'}\Phi\left(x'\right)v\left(P_{i}'\right)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x'\in P_{i}'}\left(\int_{P''}f\left(x',x''\right)dx''\right)v\left(P_{i}'\right)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x'\in P_{i}'}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{P_{j}''}f\left(x',x''\right)dx''\right)v\left(P_{i}'\right)\leq$$

$$\leq\sum_{i}\sup_{x'\in P_{i}'}\left(\sum_{j}\sup_{x''\in P_{j}''}f\left(x',x''\right)v\left(P_{j}''\right)\right)v\left(P_{i}'\right)\leq\sum_{i,j}\sup_{x'\in P_{i}'}\sup_{x''\in P_{j}''}f\left(x',x''\right)v\left(P_{j}''\right)v\left(P_{i}'\right)=\sum_{i,j}\sup_{x\in P_{i}'\times P_{j}''}f\left(x\right)v\left(P_{i}'\times P_{j}''\right)=\overline{S}\left(f,\mathscr{P}\right)$$

$\mathscr{P}=\mathscr{P}'\times\mathscr{P}''$־חלוקה של P.
$\overline{S}\left(\Phi,\mathscr{P}'\right)\leq\overline{S}\left(f,\mathscr{P}\right)$
וגם באותה הדרך $\underline{S}\left(f,\mathscr{P}\right)\leq\underline{S}\left(\Phi,\mathscr{P}'\right)$
ולכן $\underline{S}\left(f,\mathscr{P}\right)\leq\underline{S}\left(\Phi,\mathscr{P}'\right)\leq\overline{S}\left(\Phi,\mathscr{P}'\right)\leq\overline{S}\left(f,\mathscr{P}\right)$
$\mathscr{P}=\mathscr{P}'\times\mathscr{P}''$
נקבע $\varepsilon>0$
$\exists\mathscr{P}:\overline{S}\left(f,\mathscr{P}\right)<I\left(f\right)+\varepsilon$

$\mathscr{P} = \mathscr{P}' \times \mathscr{P}''$
אז $\bar{S}(\Phi, \mathscr{P}') < I(f) + \varepsilon$
$\bar{I}(\Phi) = \inf_{\mathscr{P}'} \bar{S}(f, \mathscr{P}') < I(f) + \varepsilon$
$\exists \mathscr{P} : I(f) - \varepsilon \leq \underline{S}(f, \mathscr{P})$
$\mathscr{P} = \mathscr{P}' \times \mathscr{P}''$
אז $I(f) - \varepsilon < \underline{S}(\Phi)$
ולכן:
$I(f) - \varepsilon < \underline{I}(\Phi) \leq \bar{I}(\Phi) < I(f) + \varepsilon$
$\varepsilon \to 0 \Rightarrow I(\Phi) = \underline{I}(\Phi) = \bar{I}(\Phi) \Rightarrow \Phi \in \mathscr{R}(\mathscr{P}')$

הערה

גם אם לכל $x'' \in P''$ הפונקציה $P' \ni x' \to f(x', x'') \in \mathscr{R}(P')$ אז $\Psi(x'') := \int_{P'} f(x', x'') \, dx'$ היא אינטגרבילית ב־P'' ו־$\int_{P''} \Psi(x'') \, dx'' = \int_P f(x) \, dx$

משפט Fubini

$P = P' \times P'', f \in \mathscr{R}(P)$
אם:
$\forall x' \in P' : f(x', *) \in \mathscr{R}(P'')$
$\forall x'' \in P'' : f(*, x'') \in \mathscr{R}(P')$
אז קיימים האינטגרלים:
$\int_{P'} \left(\int_{P''} f(x', x'') \, dx'' \right) dx' = \int_{P''} \left(\int_{P'} f(x', x'') \, dx' \right) dx'' = \int_P f(x) \, dx$
$P = P' \times P'$
$\int_{[a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]} f(x) \, dx = \int_{[a_1,b_1]} .. \int_{[a_n,b_n]} f(x_1, .., x_n) \, dx_n .. dx_1$
$f \in E(\Omega)$, Ω־תחום פשוט

דוגמא

$I = \int_0^2 \int_x^{2x} (f(x,y) \, dy) \, dx$
$0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x$

$$I = \iint\limits_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x}} f(x,y) \, dxdy = \int_0^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{\min(y,2)} f(x,y) \, dx \right) dy = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y) \, dxdy + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y) \, dxdy$$

דוגמא

$\int_0^1 \left(\int_0^1 y^3 e^{xy^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 y^3 e^{xy^2} dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{y^2} \left(e^{y^2} - 1 \right) dy = \int_0^1 y \left(e^{y^2} - 1 \right) dy = \int y e^{y^2} dy - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}$

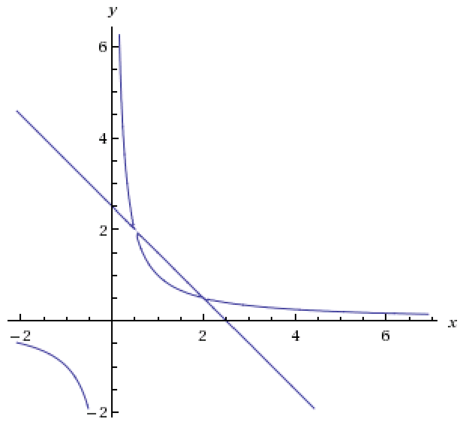
דוגמא ־ נוסחת דיריכלה

$a > 0$ $\int_0^a dx \left(\int_0^x f(x,y) \, dy \right) = \int_0^a dy \left(\int_y^a f(x,y) \, dx \right)$
נהוג גם לכתוב אינטגרלים כפולים באופן הזה.
$\Omega : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq x$

שטח

$\Omega : \begin{cases} xy = a^2 \\ x + y = \frac{5}{2}a & , a > 0 \end{cases}$
$y = \frac{5}{2}a - x$
$x \left(\frac{5}{2}a - x \right) = a^2$
$x_1 = 2a, x_2 = \frac{a}{2}$

$$S=\int_{\frac{a}{2}}^{2a}\left(\int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a-x}dy\right)dx=\int_{\frac{a}{2}}^{2a}\left(\frac{5}{2}a-x-\frac{a^2}{x}\right)dx=\dots$$



דוגמא ב$n=3$

$$\int_0^1 dx\left(\int_0^{1-x}dy\left(\int_0^{x+y}f(x,y,z)\,dz\right)\right)=\int dz\,(dx\,(f\,dy))$$

$$\Omega:\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\Omega:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1-x & \downarrow\uparrow\\0\le z\le x+y\end{cases}$$

$$0\le z\le 1,0\le x\le 1,y\le 1-x$$

$$\max(z-x,0)\le y\begin{cases}z-x\le y\\0\le y\end{cases}$$

$$I=\int_0^1 dz\left(\int_0^1 dx\left(\int_{\max(z-x,0)}^{1-x}f(x,y,z)\,dy\right)\right)$$

$$z=x+y\Rightarrow x+y-z=0\Rightarrow\overrightarrow{n}=(1,1,-1)$$

נוסחת החלפת משתנים

עבור $n=1$**:**

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\{y=\varphi(x)\}=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(y)\,dy$$

$$x\in(a,b);\varphi'(x)\ne 0;\varphi\in C^1(a,b)$$

$\varphi'(x)\ne 0\Leftarrow\varphi$ **יורד או עולה ממש**

1. **אם** φ **עולה** $c>d$ **:** $\int_{[a,b]}f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int_{[c,d]}f(y)\,dy$
2. **אם** φ **יורד** $\int_{[a,b]}f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=-\int_{[d,c]}f(y)\,dy$

$$\Downarrow$$

$$\int_{[a,b]}f(\varphi(x))\,(-\varphi'(x))\,dx=-\int f(y)\,dy$$

בכל מקרה: $\int_{[a,b]}f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int_{\varphi[a,b]}f(y)\,dy$