הרצאה 24

29.05.2016

נכתב על ידי נועם יערי

תזכורת

$$X \sim F_\vartheta$$

$$X_1, \cdots, X_n \sim F_\vartheta$$

אמידה נקודתית

אומד $T = t(X_1, \cdots, X_n)$ שאמור לאמוד את ϑ.

אח"ה: $E(T) = \vartheta$

השוואה לפי השונות $\rightsquigarrow UMVUE$

אומד נראות מקסימלית.

תרגיל

$$X_1, \cdots, X_n \sim P(\lambda)$$

הממוצע הוא אח"ה ל $\lambda -$.

רוצים אח"ה ל - $e^{3\lambda}$ או $e^{-\lambda}$

פתרון

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n}{n!} \cdot e^{tn} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^n}{n!} = e^{(e^t - 1)\lambda}$$

$\Leftarrow$ 4^x הוא אח"ה ל $e^{3\lambda} -$.

$$E(4^x) = E\left(e^{\log 4 \cdot x}\right) = M_x(\log 4) = e^{3\lambda}$$

השיטה עובדת לכל $e^{k\lambda}$ עם $-1 < k$.

מה עם אח"ה ל - $e^{-\lambda}$? נסמן:

$$T = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$E(T) = P(T = 1) = P(X = 0) = e^{-\lambda}$$

תרגיל

אח"ה ל - $e^{-2\lambda}$

רווח בר - סמך

ידוע ש - $X\sim F_\vartheta$, ϑ לא ידוע. המטרה היא לייצר רווח (T_1,T_2) פונקצייה של נתוני המדגם שאינם תלויים ב $-\ \vartheta$ כך ש - $P(T_1<\vartheta<T_2)=1-\alpha$.

כאשר $\underset{\text{בדרך כלל}}{=0.95}$ $1-\alpha$ היא "רמת המובחרות" של הרווח.

$X\sim N(\mu,1)$. $P(\mu=\bar{X})=0$

בנינו את הפונקציות T_1,T_2. *מבצעים את הניסוי* $\Leftarrow$ $X_1,\cdots,X_n$.

$\Leftarrow$ ערכים מספריים $t_1(X_1,\cdots,X_n),t_2(X_1,\cdots X_n)$.

רמת המובחרות היא $1-\alpha$, כלומר לפני עריכת הניסוי,

$$P(T_1<\vartheta\ \text{וגם}\ T_2>\vartheta)=1-\alpha$$

דוגמה

$$X_1,\cdots X_n\sim N(\mu,\sigma^2)$$
$$P(\boxed{?}<\mu<\boxed{?})=1-\alpha$$

ϑ ידוע,

ורוצים רווח בר $-$ סמך ל $-\ \mu$.

נפעיל את "שיטת הכמות הצירית": מחפשים גודל Q שהוא כפונקציה ה $-\ X_i$ ו $-\ \vartheta$, כך שההתפלגות של Q, קבועה (כלומר לא תלויה ב - ϑ)

$$\overline{X_n}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$$
$$Q=\frac{\overline{X_n}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$$
$$P(T_1<\mu<T_2)=1-\alpha$$

הגדרה

$Z\sim N(0,1)$. לכל $0<\gamma<1$ נגדיר Z_γ כך ש - $P(Z<Z_\gamma)=\gamma$.

למשל:

$$Z_{0.95}=1.645,Z_{0.975}=1.96$$
$$P(Z_{\frac{\alpha}{2}}<\underset{=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{Q}<Z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1-\alpha$$
$$\Rightarrow P\left(|\bar{X}-\mu|<Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

מסקנה

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ ידוע.

הרווח $\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

הוא רווח בר סמך עבור μ בעל רמת מובחרות $1-\alpha$.

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

דוגמה 2

$X_1, \cdots X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$; σ לא ידוע.

רוצים רווח סמך ל $-\mu$.

משפט

$$X_1, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$$

1. $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
2. $[S^2 = \frac{1}{n-1} \sum \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim X^2_{n-1}$
3. $\bar{X}, s^2$ בלתי תלויים.
4. $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$

$\Leftarrow$ כאשר σ לא ידוע,

$$\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

הוא רווח בר סמך ל - μ.

לקריאה עצמית :

סעיפים 3.21 3.22 3.23 בחוברת (מהדורה 1.774)