

פתרון תרגיל 12 מרוכבות תיכוניסטים תשע"ח

20 ביוני 2018

1. ראשית, נבדוק מהי התמונה של העיגול. נבדוק את הנקודות: $1, -1, i$:

$$w(1) = \frac{1-1}{1+1} = 0, w(-1) = \frac{-1-1}{-1+1} = \infty, w(i) = \frac{1-i}{1+i} = -i$$

כלומר, מעגל היחידה מועתק לציר המדומה. אם ניקח נקודה פנימית, למשל $z = 0$:

$$w(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

מועתקת לימין הציר המדומה, ולכן תמונת העיגול כולו היא חצי המישור הימני - הרביעים הראשון והרביעי. כעת, אם ניקח נקודה בתוך חצי העיגול, למשל $z = \frac{1}{2}i$:

$$w\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{1-\frac{1}{2}i}{1+\frac{1}{2}i} = \frac{2-i}{2+i} = \frac{3}{4} - i$$

ברביע הרביעי, ולכן תמונת חצי העיגול היא הרביע הרביעי.

2. נסמן: $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$, וגם: $w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = 1$. לפי הנוסחה:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

נקבל:

$$\frac{w+1}{w-1} \cdot \frac{-1}{1} = \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{i+1}{i-1} = \frac{z-1}{z+1} \cdot 2i$$

כלומר:

$$\frac{w+1}{w-1} = \frac{-2iz+2i}{z+1}$$

נבודד את w :

$$w+1 = \frac{-2iz+2i}{z+1}(w-1) \implies w + \frac{2iz-2i}{z+1}w = -1 + \frac{2iz-2i}{z+1}$$

$$w \left(\frac{(2i+1)z-2i+1}{z+1} \right) = w \left(1 + \frac{2iz-2i}{z+1} \right) = \frac{(2i-1)z-2i-1}{z+1}$$

וסה"כ:

$$w = \frac{(2i-1)z - 2i - 1}{(2i+1)z - 2i + 1}$$

3. אם נמצא שלוש נקודות ואת תמונותיהן, נוכל להשתמש בנוסחה ולמצוא את ההעתקה. שפת התחום A היא שני מעגלים משיקים; נקודת ההשקה היא $z = 2$. שפת התחום B היא שני ישרים, שהנקודה המשותפת להם היא ∞ , ולכן תמונת הנקודה $z_1 = 2$ היא $w_1 = \infty$. בנוסף, אפשר לבחור $w_2 = i$, $z_2 = -2$, וגם $w_3 = -i$, $z_3 = 0$ (אנו שולחים את שני המעגלים אל שני הישרים). שימוש בנקודות אלו בנוסחה ייתן לבסוף:

$$w = \frac{3iz + 2i}{z - 2}$$