<u>הרצאה 10</u>

<u>תמורות</u>

תמורה σ של הקבוצה $\{1,2,...,n\}$ היא העתקה חד-חד-ערכית של הקבוצה על עצמה.

אוסף התמורות σ על הקבוצה $\{1,2,...,n\}$ תסומן ע"י S_n.

<u>דוגמא</u>

הפונקציה $\sigma:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ כך ש $\sigma(1)=3,\sigma(2)=1,\sigma(3)=2$ היא איבר בקבוצה S_3.

<u>הערה</u>

בקבוצה S_3 יש !3 איברים, מכיוון שמספר האפשרויות עבור $\sigma(1)$ הוא 3. מכיוון שהפונקציה חח"ע נקבל ש $\sigma(2)\neq\sigma(1)$ ומספר האפשרויות שנותרו ל $\sigma(2)$ הוא 2. נותרה אפשרות אחת עבור $\sigma(1)$.

מספר האפשרויות הוא $3\cdot 2\cdot 1=3!$ באותו אופן מספר התמורות האפשריות עבור הקבוצה S_n הוא $n!$.

<u>סימונים</u>

תמורה σ מסומנת ע"י $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & . & . & . & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & . & . & . & \sigma(n)\end{pmatrix}$

או פירוק למחזורים זרים: כותבים את כל המסלולים של σ על איברים $x\in\{1,2,...,n\}$, כלומר ביטויים מהצורה $(x,\sigma(x),\sigma^2(x),...)$ עד שחוזרים ל x.

<u>דוגמא</u>

ניתן לרשום את הדוגמא הקודמת בשני אופנים:

$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ או $(1,3,2)$.

<u>תמורת הזהות</u>

התמורה $id\in S_n$ המקיימת $id(x)=x$ לכל $x\in\{1,2,...,n\}$ נקראת תמורת הזהות.

<u>הרכבת תמורות</u>

הרכבת תמורות $\tau,\sigma\in S_n$ מוגדרת כהרכבת פונקציות $\tau\sigma(x):=\tau(\sigma(x))$ לכל $x\in\{1,2,...,n\}$.

<u>הפיכת תמורה</u>

כל תמורה $\sigma\in S_n$ היא פונקציה חח"ע ועל ולכן יש תמורה יחידה $\tau\in S_n$, כך ש $\tau\sigma=\sigma\tau=id$.

מסמנים $\tau=\sigma^{-1}$.

<u>תמורה זוגית ותמורה אי זוגית</u>

תהא $\sigma\in S_n$ תמורה. היפוך סדר בתמורה הוא זוג i,j כך ש $i<j$ אבל $\sigma(i)>\sigma(j)$.

יהא $h(\sigma)$ מספר היפוכי הסדר של σ. הסימן של σ, $\operatorname{sgn}(\sigma)$, מוגדר להיות 1+ אם מספר היפוכי הסדר ב σ זוגי, ו -1 אם הוא אי זוגי. $\operatorname{sgn}(\sigma):=(-1)^{h(\sigma)}$.

התמורות עם סימן 1 נקראות תמורות זוגיות, והתמורות עם סימן -1 נקראות תמורות אי זוגיות.

<u>דוגמאות</u>

$\operatorname{sgn}(id)=1$ (מכיוון שמספר ההיפוכים הוא 0)

$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$ ב S_5. נספור את מספר ההיפוכים.

$(1,3),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(4,5)$ סה"כ יש שישה היפוכים ולכן התמורה זוגית ו $\operatorname{sgn}(\sigma)=1$.

טענה

יהיו $\sigma,\tau\in S_n$ אזי $\operatorname{sgn}(\tau\circ\sigma)=(\operatorname{sgn}\tau)\cdot(\operatorname{sgn}\sigma)$.

הוכחה

נגדיר $g(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)$.

עבור $g(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)$ נגדיר $\sigma(g(x_1,x_2,...,x_n))=\prod_{i<j}(x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)})$.

σ פונקציה חח"ע ועל ולכן הזוגות בגורמי המכפלה ב $g(x_1,x_2,...,x_n)$ וב $\sigma(g(x_1,x_2,...,x_n))$ זהות רק בכל היפוך הסימן עבור גורם במכפלה משתנה.

אם σ זוגי אז מספר ההיפוכים זוגי ואז $\sigma(g(x_1,x_2,...,x_n))=g(x_1,x_2,...,x_n)$

ואם σ אי זוגי אז מספר ההיפוכים אי זוגי ואז $\sigma(g(x_1,x_2,...,x_n))=-g(x_1,x_2,...,x_n)$

סה"כ נקבל ש $\sigma(g)=\operatorname{sgn} g$

$\operatorname{sgn}(\tau\circ\sigma)g=(\tau\circ\sigma)(g)=\tau(\sigma(g))=\tau((\operatorname{sgn}\sigma)g)=(\operatorname{sgn}\tau)(\operatorname{sgn}\sigma)g$.

סה"כ קיבלנו ש $\operatorname{sgn}(\tau\circ\sigma)=(\operatorname{sgn}\tau)(\operatorname{sgn}\sigma)$.

מסקנה

$\operatorname{sgn}\sigma=\operatorname{sgn}\sigma^{-1}$.

הוכחה

$\sigma\circ\sigma^{-1}=id$ $\operatorname{sgn} id=1$ ולכן $(\operatorname{sgn}\sigma)\cdot(\operatorname{sgn}\sigma^{-1})=1$ סה"כ נקבל שתי אפשרויות

או ש $\operatorname{sgn}\sigma=\operatorname{sgn}\sigma^{-1}=-1$ או ש $\operatorname{sgn}\sigma=\operatorname{sgn}\sigma^{-1}=1$

דטרמיננטות

תהא נתונה מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$.

נבחן מכפלה של n איברים של A, כך שאיבר אחד ורק אחד נלקח מכל שורה ואיבר אחד ורק אחד נלקח מכל עמודה. מכפלה כזו ניתנת לכתיבה בצורה הבאה: $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdot...\cdot a_{n\sigma(n)}$.

סדרת האינדקסים $\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n)$ יוצרת תמורה ב S_n וכל תמורה ב S_n קובעת מכפלה.

המטריצה A מכילה $n!$ מכפלות כאלה.

הגדרה

הדטרמיננטה של $A=(a_{ij})$ שתסומן ב $\det(A)$ או ב $|A|$, היא הסכום של כל $n!$ המכפלות הנ"ל, כאשר כל מכפלה כזו מוכפלת ב $\operatorname{sgn}\sigma$. $|A|=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot...\cdot a_{n\sigma(n)}$.

דוגמא

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$. ב S_3 התמורות $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ הן זוגיות

והתמורות $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ הן אי זוגיות ולכן

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

<u>הערה</u>

חישוב הדטרמיננטה בעזרת ההגדרה עבור מטריצה מסדר $n\times n$ הוא $n!$.

נראה דרכים נוספות לחישוב הדטרמיננטה של מטריצה.

<u>משפט</u>

$|A|=|A^t|$.

<u>הוכחה</u>

אם $A=(a_{ij})$ ו $B=A^t$ אזי $b_{ij}=a_{ji}$.

$|A^t|=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot b_{1\sigma(1)}\cdot b_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot b_{n\sigma(n)}=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{\sigma(1)1}\cdot a_{\sigma(2)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}$ יהי $\tau=\sigma^{-1}$ ואז

$a_{\sigma(1)1}\cdot a_{\sigma(2)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}=a_{1\tau(1)}\cdot a_{2\tau(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\tau(n)}$ נקבל ש

$$|A^t|=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma a_{1\tau(1)}\cdot a_{2\tau(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\tau(n)}=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\tau a_{1\tau(1)}\cdot a_{2\tau(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\tau(n)}.$$

מכיוון שכאשר σ רץ על כל איברי S_n (הרי לכל תמורה σ קיים איבר הופכי יחיד) $\tau=\sigma^{-1}$ גם הוא רץ על כל איברי S_n ולכן $|A|=|A^t|$.

<u>הערה</u>

מכיוון שהוכחנו ש $|A|=|A^t|$ אז כל משפט שמדבר על שורות המטריצה ניתן להמיר אותו למשפט על עמודות המטריצה.

<u>טענה</u>

נניח ש B מתקבלת מ A ע"י החלפת שתי שורות (עמודות) של A ביניהן, אז $|B|=-|A|$.

<u>הוכחה</u>

נניח שהשורה ה i הוחלפה עם השורה ה j במטריצה A והתקבלה המטריצה B.

תהיי τ תמורה כך ש $\tau(k)=k$ כאשר $1\le k\le n$, $k\ne i,j$, $\tau(i)=j$, $\tau(j)=i$.

נקבל ש $b_{l\sigma\tau(l)}=a_{l\sigma(l)}$

בתמורה τ יש חילוף אחד בלבד ולכן $\operatorname{sgn}\tau=-1$. $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=\operatorname{sgn}\sigma\cdot\operatorname{sgn}\tau=-\operatorname{sgn}\sigma$.

$$|B|=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot b_{1\sigma(1)}\cdot b_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot b_{n\sigma(n)}=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot b_{1\sigma\tau(1)}\cdot b_{2\sigma\tau(2)}\cdot\ldots\cdot b_{n\sigma\tau(n)}=$$
$$=-\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma\tau)\cdot b_{1\sigma\tau(1)}\cdot b_{2\sigma\tau(2)}\cdot\ldots\cdot b_{n\sigma\tau(n)}=-\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma\tau)\cdot a_{1\sigma\tau(1)}\cdot a_{2\sigma\tau(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma\tau(n)}=-|A|$$

מאחר ש σ רץ על כל איברי S_n, $\sigma\tau$ גם רץ על כך איברי S_n.

<u>משפט</u>

א. אם ל A יש שורת (עמודת) אפסים, אז $|A|=0$.

ב. אם ל A יש שתי שורות (עמודות) זהות, אז $|A|=0$.

ג. אם A משולשת, כלומר, ל A יש אפסים מעל או מתחת לאלכסון, אז $|A|$ שווה למכפלת איברי האלכסון של A. על כן בפרט, $|I|=1$.

הוכחה

א. כל מחובר ב $|A|$ מכיל גורם מכל שורה ובפרט משורת אפסים. כל מחובר של $|A|$ הוא אפס ולכן $|A|=0$.

ב. נניח ש $char\mathbb{F}\neq 2$. אם נחליף ביניהן את שתי השורות הזהות של A, נקבל שוב את המטריצה A ולפי טענה קודמת נקבל ש $|A|=-|A| \Rightarrow |A|=0$.

נניח ש $char\mathbb{F}=2$. נקבל ש $\operatorname{sgn}\sigma=1$ עבור כל $\sigma\in S_n$. למטריצה A יש שתי שורות זהות, ניתן לסדר את המחוברים של $|A|$ בזוגות של מחוברים שווים. סכום כל זוג נותן אפס ולכן הדטרמיננטה של A היא אפס.

ג. נניח ש $A=\left(a_{ij}\right)$ היא משולשית תחתונה ז"א $a_{ij}=0$ לכל $i<j$. עבור כל מחובר ש $\sigma(1)\neq 1$ נקבל $a_{1\sigma(1)}=0$ ואז המכפלה $a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}=0$ אם $\sigma(1)=1$ עבור כל מחובר ש $\sigma(2)\neq 2$ נקבל $a_{2\sigma(2)}=0$ ואז המכפלה $a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}=0$
נמשיך כך עד n ונקבל שרק עבור תמורת הזהות המכפלה לא אפס. תמורת הזהות זוגית ולכן $|A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$.

משפט

נניח ש B מתקבלת מ A ע"י פעולת שורה (עמודה) אלמנטארית.

א. אם הוחלפו שתי שורות (עמודות) של A ביניהן, אז $|B|=-|A|$.

ב. אם הוכפלה שורה (עמודה) של A בסקלר α, אז $|B|=\alpha|A|$.

ג. אם הוספה כפולה של שורה (עמודה) לשורה (עמודה) אחרת, אז $|B|=|A|$.

הוכחה

א. הראינו בטענה הקודמת.

ב. אם השורה ה j-ית של A מוכפלת ב α, אז כל מחובר ב $|A|$ מוכפל ב α וכך $|B|=\alpha|A|$.

$$|B|=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot b_{1\sigma(1)}\cdot b_{2\sigma(2)}\ldots\cdot b_{n\sigma(n)}=$$

$$\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot\left(\alpha a_{j\sigma(j)}\right)\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}=\alpha\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}=\alpha|A|$$

ג. נניח שמחברים α פעמים את השורה ה k-ית לשורה ה j-ית של A. נסמן את המחובר במקום ה j במחוברי הדטרמיננטה

$$|B|=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\operatorname{sgn}\sigma\right)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot\overbrace{ca_{k\sigma(k)}+a_{j\sigma(j)}}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}=$$

$$\sum_{\sigma\in S_n}\left(\operatorname{sgn}\sigma\right)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot\widehat{ca_{k\sigma(k)}}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}+\sum_{\sigma\in S_n}\left(\operatorname{sgn}\sigma\right)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot\widehat{a_{j\sigma(j)}}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}=$$

$$c\sum_{\sigma\in S_n}\left(\operatorname{sgn}\sigma\right)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot\widehat{a_{k\sigma(k)}}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}+\sum_{\sigma\in S_n}\left(\operatorname{sgn}\sigma\right)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot\widehat{a_{j\sigma(j)}}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$$

הסכום הראשון הוא דטרמיננטה של מטריצה אשר שורותיה ה k-ית וה j-ית זהות ולכן על פי משפט קודם הסכום הוא אפס והסכום השני הוא הדטרמיננטה של A. סה"כ קיבלנו $|B|=c\cdot 0+|A|=|A|$.

משפט

תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. A הפיכה $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$.

הוכחה

אם A הפיכה, אז היא שקולת שורה ל I , $|I| \neq 0$ ומהמשפט הקודם נקבל שהשפעתן של פעולות שורה אלמנטאריות היא בשינוי סימן הדטרמיננטה או בהכפלת הדטרמיננטה בסקלר שונה מאפס ולכן $|A| \neq 0$.

אם A אינה הפיכה אז היא שקולת שורה למטריצה עם שורת אפסים שהדטרמיננטה של שונה מאפס ושוב מהמשפט הקודם נקבל ש $|A| = 0$.

למה

תהי E מטריצה אלמנטארית. אזי, לכל מטריצה A , $|EA| = |E| \cdot |A|$.

הוכחה

אם E_1 מתקבלת ע"י הכפלת שורה בקבוע α שונה מאפס נקבל ש $|E_1| = \alpha$.

$|E_1 A| = |\rho(A)| = \alpha |A| = |E_1| \cdot |A|$.

אם E_2 מתקבלת ע"י החלפת שתי שורות זו בזו נקבל ש $|E_2| = -|I| = -1$.

$|E_2 A| = |\rho(A)| = -|A| = |E_2| \cdot |A|$.

אם E_3 מתקבלת ע"י הוספת כפולה של שורה אחת לאחרת נקבל ש $|E_3| = |I| = 1$.

$|E_3 A| = |\rho(A)| = |A| = |E_3| \cdot |A|$.

הערה

ניתן להראות באינדוקציה ש $|E_n \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A| = |E_n| \cdot \ldots \cdot |E_2| \cdot |E_1| \cdot |A|$.

משפט

$|AB| = |A| \cdot |B|$.

הוכחה

אם A לא הפיכה אז $|A| = 0$. A לא הפיכה ולכן AB לא הפיכה ואז $|AB| = 0$ סה"כ נקבל ש

$|AB| = |A| \cdot |B| \Leftarrow |AB| = 0, |A| \cdot |B| = 0 \cdot |B| = 0$.

אם A הפיכה אז ניתן לרשום את כמכפלה של מטריצות אלמנטאריות ולקבל $A = E_n \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1$.

$|AB| = |E_n \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot B| = |E_n| \cdot \ldots \cdot |E_2| \cdot |E_1| \cdot |B| = |A| \cdot |B|$.

מסקנה

אם A מטריצה הפיכה אז $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

A הפיכה ולכן קיימת מטריצה B כך ש $AB = I \Leftarrow |A| \cdot |B| = |AB| = |I| = 1 \Leftarrow |B| = |A|^{-1}$.

פיתוח דטרמיננטה לפי שורה/עמודה

תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה. המינור ה i, j של A הוא המטריצה $A_{ij} \in \mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ המתקבלת מ A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j .

משפט

א. פיתוח לפי שורה i : $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$.

ב. פיתוח לפי עמודה j : $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$.

הוכחה

א. $A=\left(a_{ij}\right)$. כל מחובר ב $|A|$ מכיל איבר אחד ורק אחד מהשורה ה i-ית $\left(a_{i1},a_{i2},...,a_{in}\right)$ של A.

נסמן k_{ij} כסכום של מחוברים שאין בהם איבר מהשורה ה i-ית.

נקבל ש $|A|=a_{i1}k_{i1}+...+a_{in}k_{in}$. נשאר להראות ש $k_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$.

עבור המקרה $i=j=n$ נקבל

$$a_{nn}k_{nn}=a_{nn}\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(n)=n}}sign\left(\sigma\right)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot...\cdot a_{n\sigma(n)}$$

$$=a_{nn}\sum_{\sigma\in S_{n-1}}sign\left(\sigma\right)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot...\cdot a_{n-1\sigma(n-1)}=a_{nn}\left|A_{nn}\right|=a_{nn}\left(-1\right)^{n+1}\left|A_{nn}\right|$$

במקרה הכללי של i,j נחליף את השורה ה i בשורה שמתחתיה, ונחזור על התהליך עד ששורה זו תהייה האחרונה ($n-i$ צעדים).

נשים לב שהפעולה אינה משנה את A_{ij} (כאשר ה i מציין את המקום החדש).

בדומה, נזיז את עמודה j להיות האחרונה על ידי $n-j$ צעדים מבלי לשנות את A_{ij} (כאשר ה j מציין את המקום החדש).

הגענו למצב שבו $i=j=n$.

כל החלפה כנ"ל כופלת את $|A|$ ולכן את k_{ij} ב -1, לכן $k_{ij}=\left(-1\right)^{(n-i)+(n-j)}\left|A_{ij}\right|=\left(-1\right)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$.

ב.

פיתוח לפי עמודה j של מטריצה A הוא כמו פיתוח לפי שורה j של המטריצה A^t ומכיוון ש $\left|A^t\right|=|A|$ נקבל $|A|=\sum_{i=1}^{n}\left(-1\right)^{i+j}a_{ij}\left|A_{ij}\right|$.