חוברת הרצאות בקורס "**אנליזה מודרנית 1**"
88-341

5 בפברואר 2017

מרצה: ד"ר טל נוביק

סמסטר א -2017 תשע"ז

ערכו:
איתי רוזנבאום,
ליאור פולק

אנליזה מודרנית- הרצאה ראשונה

נתבונן בסדרות של פונקציות

דוגמא 1

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = x^n$$
$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$
$$\int_0^1 f(x) = 0$$

דוגמא 2

כעת נתבונן בסדרת הפונקציות f_n המוגדרת ע"י משולש שקודקודו ב$(\frac{1}{n}, n)$ ובסיסו באורך $\frac{2}{n}$

$$\lim f_n = 0$$
$$\int_0^1 f_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 1$$

דוגמא 3

נמנה את הרציונלים ב $[0,1]$ בסדרה $r_1, r_2, r_3, ..$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = r_1, .., r_n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$
$$\lim f_n = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & else \end{cases}$$

כל פונקציה בסדרה אינטגרבילית אך פונקצית הגבול לא.

המטרה שלנו היא להכליל את מושג ה"אורך" לקבוצות כלליות, ובשביל זה נגדיר את המושג **מידה.**

מידה

נתחיל כעת בבנייה שהמטרה שלה להגדיר מידה, ובסופה להראות שלא קיימת כזו.

בנייה

על $[0,1]$ נגדיר את השקילות הבא $x \sim y$ אם $x-y \in \mathbb{Q}$
נגדיר את A להיות קבוצה שבה יש נציג אחד בדיוק מכל מחלקת שקילות.
נסמן בμ את המידה שלכאורה יש לנו, ונגדיר את התכונות הרצויות לנו.
אם $a \neq b \in A$ אז $a-b \notin \mathbb{Q}$ ולכן לכל שני רציונלים $r_1 \neq r_2$ $r_1+A \cap r_2+A = \phi$
כי אחרת נקבל ש $a-b = r_1 - r_2 \in \mathbb{Q}$
$[0,1] \subseteq \cup_{r \in \mathbb{Q}, -1 \leq r \leq 1}(r+A) \subseteq [-1,2]$

הגדרה 0.1 תהי X קבוצה, אוסף A של תתי קבוצות של X יקרא σ־אלגברה אם מתקיים

1. $\phi \in A$
2. $E \in A$ אז גם $E^c \in A$
3. אם $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ אוסף בן מנייה של קבוצות בA אז גם האיחוד שלהם בA.

במקרה זה הזוג $(X, \mathbb{A})$ נקרא מרחב מדיד והקבוצות בA נקראות קבוצות מדידות.

הגדרה 0.2 תהי X קבוצה. אוסף A של תתי קבוצות של X תקרא אלגברה אם מתקיים הנ"ל מלבד זה שסגורה רק תחת איחודים סופיים במקום איחודים בני מנייה.

תוצאות מידיות

1. $X \in A$
2. σ־ אלגברה היא אלגברה
3. מכללי דה־מורגן נקבל ש σ־אלגברה (אלגברה) סגורה גם תחת חיתוכים בני מנייה (או חיתוכים סופיים)
4. אלגברה סגורה להפרשים. אם $A, B \in A$ אז $A - B \in A$ כי $A - B = A \cap B^c$
5. חיתוך σ ־אלגברה על X הוא σ־אלגברה. כנל לאלגברות.

מסקנה מ5: אם $B \subseteq P(x)$ אזי קיימת הσ־אלגברה המינימלית המכילה את B (חיתוך כל הσ־אלגברות מהכילות אותה)
ל$-\sigma$־אלגברה הנ"ל (המינימלית) נקרא הσ אלגברה **הנוצרת** ע"י B ונסמנה $\sigma(B)$
אם (X, τ) מרחב טופולוגי אז $\sigma(\tau)$ נקראת σ־אלגברת בורל של X והקבוצה ב$\sigma(\tau)$ נקראות קבוצות בורל.

הגדרה 0.3 יהי $(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד (כלומר $\mathcal{A}$ σ־אלגברה על X). מידה על $\mathcal{A}$ היא פונקציה $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ המקיימת

1. $\mu(\phi)=0$

2. אם $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ אוסף בן מנייה של קבוצות זרות ב$\mathcal{A}$ אז $\mu(\cup_{i\in\mathbb{N}}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$

$(X,\mathcal{A},\mu)$ נקרא מרחב מידה. התכונה 2 נקראת "σ־אדטיבית"

תוצאות מידיות

1. מידה היא גם אדטיבית סופית.

2. מונוטונית, כלומר אם $A,B\in\mathcal{A}$ ו$A\subseteq B$ אז $\mu(A)\leq\mu(B)$ כי הראנו ש $B-A\in\mathcal{A}$ מתקיים $\mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A)\geq\mu(A)$

3. אם $A\subseteq B$ ו$\mu(A)<\infty$ אז נוכל לחסר משני צדדי השוויון הקודם את $\mu(A)$ ולקבל $\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A)$

נביט במרחב המדיד $(\mathbb{N},P(\mathbb{N}))$. תהי $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה של מספרים אי שליליים, נגדיר מידה μ על $P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $\mu(A)=\sum_{n\in A}a_n$.

למשל, אם ניקח $a_n=1$ לכל n נקבל שהמידה היא בעצם העוצמה של הקבוצה.

נוכל לקחת $a_n=\begin{cases}1 & n=13\\ 0 & n\neq 13\end{cases}$ ונקבל מידה שאומרת אם a_{13} נמצא שם או לא.

גם על $P(\mathbb{R})$ אפשר להגדיר μ כזו, אך אז זו אינה מידה כי זה אינו אינווריאנטי להזזות.

טענה 0.4 יהי $(X,\mathcal{A},\mu)$ מ"מ (מרחב מידה) ונניח $\{E_i\}$ סדרה עלה של קבוצות מדידות (כלומר $E_n\subseteq E_{n+1}$ לכל n) אזי $\mu(\cup_{i\in\mathbb{N}}E_i)=\lim_{i\to\infty}\mu(E_i)$ (הגבול בהכרח קיים כי זוהי סדרה מונוטונית עולה ואין לנו בעיה שיתקבל הערך ∞).

הוכחה: נגדיר $F_n=E_n-E_{n-1}$ אזי F_n זרות זו לזו ומתקיים $\cup_nF_n=\cup_nE_n$ נקבל:

$$\mu(\cup_nE_n)=\mu(\cup_nF_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(F(_i))=\lim_{n\to\infty}\mu(\cup_{1\leq i\leq n}F_i)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)$$ ■

נראה שעבור סדרה יורדת זה לא נכון. נקח על $\mathbb{N}$ את מידת המנייה כלומר $\mu(A)=|A|$, $E_n:=\{n,n+1,n+2,..,\}$. זוהי סדרה יורדת, $\cap E_n=\phi$ ולכן $\mu(\cap E_n)=0$

טענה 0.5 תהי $\{E_n\}$ סדרה יורדת של קבוצות מדידות כך ש $\mu(E_1)<\infty$ אזי $\mu(\cap_{i\in\mathbb{N}}E_i)=\lim_{i\to\infty}\mu(E_i)$

הוכחה: נגדיר $F_n = E_1 - E_n$ אזי F_n סדרה עולה ולכן $\mu(\cup_n F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$

אולם $\cup_n F_n = E_1 - \cap_n E_n$

$F_n = E_1 - E_n$

לכן $\mu(\cup F_n) = \mu(E_1) - \mu(\cap E_n)$

$\mu(E_1) - \mu(\cap_n E_n) = \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$

$\mu(F_n) = \mu(E_1) - \mu(E_n)$ ■

חוזרים ל$\mathbb{R}$

נגדיר e להיות אוסף הקטעים מהצורה $(a,b]$ $(-\infty,b]$ (a,∞)

הגדרה 0.6 תהי X קבוצה. אוסף e של תתי קבוצות של X תקרא אלגברה למחצה אם מתקיים:

1. $\phi \in e$
2. אם $A,B \in e$ אז $A \cap B \in e$
3. אם $A \in e$ אז A^c הוא איחוד **סופי וזר** של קבוצות מe

אנליזה מודרנית- הרצאה 3

C אלגברה למחצה על $\mathbb{R}$: כל הקטעים החצי פתוחים חצי סגורים:
$(-\infty,b],(a,b],(a,\infty)$

נגדיר מידה על C

בהנתן פונקציה לא יורדת ורציפה מימין $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, נגדיר באמצעותה מידה על C באופן הבא:

- $\mu([a,b]) := F(b)-F(a)$
- $\mu((-\infty,b]) := F(b)-\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$
- $\mu((a,\infty)) = \lim\limits_{x\to\infty}F(x)-F(a)$

דוגמא

$\bigcup\limits_n(a+\frac{1}{n},b]=(a,b]$, $\cap_a(a,b+\frac{1}{n}]=(a,b]$

עוד משהו

$\cup(a,b-\frac{1}{n}]=(a,b)$
$\cap(a-\frac{1}{n})=[a,b]$
המידה שלהם תהיה שווה רק אם המידה של נקודה בודדת תהיה 0, ואנחנו לא רוצים לכפות תנאי זה, ולכן איננו דורשים רציפות משמאל.

נוכיח שזוהי אכן מידה

$\phi=(a,a)$ **כי** $\mu(\phi)=0$
נראה אדטיביות:
אם $(a,b]$ איחוד של מספר סופי של קטעים מC. אז בהכרח יש
$a=a_0<a_1..<a_n=b$ כך שאוסף הקטעים:
$\{(a_{i-1},a_i]:1\leq i\leq n\}$ ואז:
$$\sum_{i=1}^{n}\mu((a_{i-1},a_i])=\sum_{i=1}^{n}(F(a_i)-F(a_{i-1}))=F(a_n)-F(a_0)=\mu((a,b])$$
ולכן מתקיימת אדטיביות סופית.

נראה שהמידה מונוטונית (אם קטע מוכל באחר, המידה קטנה משל..)

$(a,b] \subseteq \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup}(a_i,b_i]$

צ"ל:

$$F(b)-F(a) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(F(b_i)-F(a_i)\right)$$

נקבע $\epsilon > 0$. F רציפה מימין **בa** לכן יש $a < c$ כך ש

$$F(c) \leq F(a)+\epsilon$$

מהרציפות מימין בb_i קיים $b_i < d_i$ כך ש

$$F(d_i) \leq F(b_i)+\frac{\epsilon}{2^i}$$

$$[c,b] \subseteq \underset{i}{\cup}(a_i,d_i)$$

זהו כיסוי פתוח של $[c,b]$, שהוא קומפקטי. לכן יש תת כיסוי סופי ע"י סידור מחדש. נניח

$$[c,b] \subseteq \underset{1\leq i\leq n}{\cup}(a_i,d_i)$$

$$F(b)-F(a)-\epsilon \leq F(b)-F(c) = \sum F(e_i)-F(e_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n}F(d_i)-F(a_i) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n}F(d_i)-F(a_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}F(d_i)-F(a_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}F(b_i)-F(a_i)+\epsilon$$

תהי C אלגברה למחצה. נגדיר את $\mathcal{A}$ להיות אוסף כל האיחודים הסופיים של קבוצות מ C

טענה 0.1 $\mathcal{A}$ היא אלגברה (ולכן האלגברה הנוצרת ע"י C).

הוכחה: נוכיח שאם $A,B \in \mathcal{A}$ אז $A\cap B \in \mathcal{A}$ ואם $A \in \mathcal{A}$ אז $A^c \in \mathcal{A}$ ואז סיימנו לפי דה מורגן.

תהי $A = F_1 \cup F_2,..,\cup F_n$ (איחודים זרים) $F_i \in C$.

$B = G_1 \cup G_2 \cup .. \cup G_k$ כאשר $G_i \in C$.

כעת $A \cap B = \underset{i,j}{\cup}F_i \cap G_j \in C$

כעת נוכיח שאם $F \in C$ אז $F \in \mathcal{A}$.

תהי $A \in \mathcal{A}$, $A = F_1 \cup .. \cup F_n$ ולכן

$A^c = F_1^c \cap .. \cap F_n^c$ וסיימנו. ■

נרחיב את μ מC ל$\mathcal{A}$ באופן הבא:

בהנתן $E \in \mathcal{A}$ נתן להציג כ

$E = F_1 \cup .. \cup F_n$ $F_i \in C$, (כל האיחודים כאן זרים)

נגדיר $\mu(E) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E_i)$

צריך להראות שזה מוגדר היטב.

כלומר, צריך להכיח שאם

$$F_1 \cup .. \cup F_n = G_1 \cup .. \cup G_k$$

אז

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) = \sum_{j=1}^{k} \mu(G_j)$$

$$F_i = (F_i \cap G_1) \cup .. \cup (F_i \cap G_k)$$

$$\mu(F_i) = \sum_{j=1}^{k} \mu(F_i \cap G_j)$$

ולכן

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) = \sum_{i,j} \mu(F_i \cap G_j)$$

נוכיח σ־אדטיביות.

$E, E_i \in \mathcal{A}$ **,**$E = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i$

$$C \ni G_i = \bigcup_{kl} G_i \cap F_k^l \in C$$

$$\mu(G_i) = \sum_{kl} \mu(G_i \cap F_k^l)$$

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(G_i) = \sum_{i,k,l} \mu(G_i \cap F_k^l) = \sum_k \left(\sum_{i,l} \mu\left(G_i \cap F_k^l\right) \right)$$

מידה חיצונית

הגדרה 0.2 מידה חיצונית על $P(X)$ היא פונקציה $l : P(X) \to [0, \infty]$

1. $l(\phi) = 0$
2. σ– **תת אדיטיביות:** $l(\underset{i\in N}{\cup} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} l(A_i)$
3. **מונוטוניות:** $A \subseteq B$ גורר $l(A) \leq l(B)$

בהנתן מידה μ על אלגברה $\mathcal{A}$על X, נרחיב אותה למידה חיצונית על $P(X)$.
בהנתן $B \subseteq X$ נגדיר
$l(B) := \inf\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ כאשר האינפימום הוא על כל הכסויים של B ע"י אוספים בני מנייה $\{E_i\}$ של קבוצות מ$\mathcal{A}$.

נוכיח ש l שהגדרנו מידה חיצונית

1. $l(\phi) = 0$
2. נניח $\{B_i\}$ אוסף בן מנייה של תתי קבוצות של X. צריך להוכיח ש $l(\underset{i\in N}{\cup} B_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} l(B_i)$. לכל $i \in \mathbb{N}$ יש לB_i כיסוי $\{E_i^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ע"י קבוצת מ$\mathcal{A}$(כלומר $B_i \subseteq \underset{j\in\mathbb{N}}{\cup} E_i^j$) שמקיים $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu(E_i^j) \leq l(B_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$. האוסף $\{E_i^i\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ הוא כיסוי של $\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} B_i$ לכן $l(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} B_i) \leq \sum\limits_{i,j}\mu(E_i^j) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} l(B_i) + \epsilon$. זה נכון לכל $\epsilon > 0$ לכן
$l(\underset{i\in N}{\cup} B_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} l(B_i)$
3. אם $B \subseteq C$, כל כיסוי של C הוא גם כיסוי של B, ולכן בהכרח ה inf שמגדיר את $l(B)$ קטן/שווה לinf שמגדיר את $l(C)$

קבוצה מדידה לפי l

הגדרה 0.3 נתונה מידה חיצונית l על $P(X)$, $E \subseteq X$ תקרא מדידה לפי l אם לכל $A \subseteq X$ מתקיים $l(A) = l(E \cap A) + l(E^c \cap A)$

דוגמא לקבוצות מדידות

משפט 0.4 אם המידה החיצונית l הוגדרה ע"י מידה μ על אלגברה $\mathcal{A}$ בשלב הקודם, אז הקבוצות מ$\mathcal{A}$ יהיו מדידות.

הוכחה: תהי $E \in \mathcal{A}$ ותהי $A \subseteq X$ כלשהי. קיים כיסוי $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ של A ע"י קבוצות מ$\mathcal{A}$ כך ש

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(F_i) \le l(A)+\epsilon$$

האוסף $\{E\cap F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ כיסוי של $E\cap A$

והאוסף $\{E^c\cap F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ כיסוי של $E^c\cap A$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E\cap F_i) \ge l(E\cap A)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E^c\cap F_i) \ge l(E^c\cap A)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\mu(E\cap F_i)+\mu(E^c\cap F_i)) \ge l(E\cap A)+l(E^c\cap A)$$

$$l(A)+\epsilon \ge \sum_{i=1}^{n}\mu(F_i)$$

וזה לכל $\epsilon > 0$ ולכן $l(A) \ge l(E\cap A)+l(E^c\cap A)$

אי השוויון בכיוון השני נובע מתת־אדיטיביות ■

נחזור למקרה הכללי של מידה חיצונית l והגדרה של קבהוצה מדידה ביחס לl.

נסמן ב$\mathcal{M}$ את קבוצת כל הקבוצות המדידיות ביחס לl.

משפט 0.5

1. $\mathcal{M}$ σ– אלגברה

2. $l|_{\mathcal{M}}$ מידה על $\mathcal{M}$

3. המידה הנל על $\mathcal{M}$ היא **שלמה** (מידה נקראת שלמה אם תת קבוצה של קבוצה מדידה שמידתה 0 גם היא מדידה)

הוכחה: נתחיל מלהוכיח את 3.

נניח $E \in \mathcal{M}$, $l(E)=0$, צ"ל שאם $B \subseteq E$ אז B מדידה.

נראה את הדבר הלכאורה יותר פשוט הבא:

אם $B \subseteq X$ מקיימת $l(B)=0$ אז $B \in \mathcal{M}$

תהי $A \subseteq X$ כלשהי $l(B\cap A)=0$מונוטונית.

$$l(A) \ge l(B\cap A) = l(B\cap A)+l(B^c+A)+l(B^c\cap A)$$

אי שוויון בכיוון ההפוך נובע מתת אדיטיביות.

כעת נתחיל מלהוכיח את 1

נראה ש $\mathcal{M}$ אלגברה.

$\phi \in \mathcal{M}$ כי $l(\phi)=0$.

נניח $E \in M$ ונראה ש $E^c \in M$ לכל $A \subseteq X$,

$$l(A)=l(E\cap A)+l(E^c\cap A)$$

אותו השוויון בחילוף תפקידים מראה ש $E^c \in M$.

יהיו $E, F \in \mathcal{M}$. רוצים להוכיח $E \cup F \in \mathcal{M}$ תהי $A \subseteq X$ כלשהו.
E מדידה,

$$l(A) = l(E\cap A)+l(E^c\cap A) = l(E\cap A)+l(F\cap E^c\cap A)+l(F^c\cap E^c\cap A) \geq l\left((E\cup F)\cap A\right)+l((F\cup E)^c\cap A)$$

כיוון שני כרגיל, מתת אדיטיביות. $\blacksquare$

אנליזה מודרנית- הרצאה 4

בשיעור שעבר הגדרנו מידנה חיצונית l. הגדרנו מהי קבוצה מדידה ביחס לl וסמנו ב$\mathcal{M}$ את קבוצת כל הקבוצות המדידות. הוכחנו ש$\mathcal{M}$ אלגברה. אנו רוצים להראות שזוהי σ-אלגברה.

נתחיל בלהוכיח גרסא מחוזקת של אדיטיביות סופית:

טענה 0.1 אם $E, F \in \mathcal{M}$ זרות ו$A \subset X$ כלשהי אז:

$$l((E \cup F) \cup A) = l(E \cap A) + l(F(\cap A)$$

הוכחה: E מדידה ולכן

$$l(\underbrace{(E \cup F) \cap A}_{*}) = l(E \cap *) = l(E^c \cap *) = l(E \cap A) + l(F \cap A)$$

באנדוקציה אם $E_1, .., E_n \in \mathcal{M}$ זרות ו$A \subseteq X$ כלשהי אז:

$$l(\underset{i \leq i \leq n}{\cup} E_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} l(E_i \cap A)$$

בפרט אם ניקח $A = X$ נקבל אדיטיביות סופית.. ∎

נראה ש$\mathcal{M}$ σ- אלגברה

תהי $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת קבוצות מדידות.

$(F_1 = E_1)$ $F_n = E_n - \underset{i \leq \text{k} \leq n-1}{\cup} E_k$

F_n מקיימים:

1. F_n זרות
2. $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} F_n = \underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} E_n$

טענה 0.2 $\underset{n \in \mathbb{N}}{\cup} F_n \in \mathcal{M}$

הוכחה: נתונה $A \subseteq X$ כלשהי. אנו יודעים ש $\underset{1 \leq k \leq n}{\cup} F_k \in \mathcal{M}$. לכן:

$$l(A) = l(\underset{1 \leq k \leq n}{\cup} F_k \cap A) + l\left(\left(\underset{1 \leq k \leq n}{\cup} F_k\right)^c \cap A\right) \geq \sum_{k=1}^{n} l(F_k \cap A) + l\left(\left(\underset{k \in \mathbb{N}}{\cup} F_k\right)^c \cap A\right)$$

מכאן:

$$l(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} l(F_k \cap A) + l\left(\left(\underset{k\in\mathbb{N}}{\cup} F_k\right)^c \cap A\right) \geq l\left(\left(\underset{k\in\mathbb{N}}{\cup} F_k\right)^c \cap A\right) + l\left(\left(\underset{k\in\mathbb{N}}{\cup} F_k\right)^c \cap A\right)$$

אי השוויון בכיוון השני מתת אדיטיביות כרגיל.

מכאן $\mathcal{M}$ σ–אלגברה. ∎

טענה 0.3 נותר להראות ש $l|_{\mathcal{M}}$ היא מידה על $\mathcal{M}$.

הוכחה: תהי $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה של קבוצות מדידות זרות. עבור n נתון:

$$l(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} E_n) \geq l(\underset{1\leq k\leq n}{\cup} E_k) = \sum_{k=1}^{n} l(E_k)$$

מכאן:

$$l(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} E_n) \geq \sum_{k=1}^{\infty} l(E_k)$$

אי השוויון בכיוון ההפוך מσ–תת אדיטיביות ∎

הגדרה 0.4 עבור הפונקציה $F(x) = x$ על $\mathbb{R}$ הσ–אלגברה המתקבלת נקראת **σ–אלגברת לבג.** הקבוצות המדידות נקראות קבוצות מדידות לבג, והמידה נקראת **מידת לבג**[1] ונסמנה בד"כ λ.

הגדרה 0.5 יהי $(X, \mathcal{M})$ מרחב מדיד. $f : X \to [-\infty, \infty]$ (או $f : X \to \mathbb{R}$ או $f : X \to [0, \infty]$) תקרא **מדידה** אם לכל r ממשי, $\{x : f(x) \leq r\}$ מדידה.

נאמר גם ש$f : X \to \mathbb{R}$ פירושו ש$f^{-1}\left([-\infty, r]\right)$ מדידה.

מהתרגיל בשעורי הבית (ש"ב 2) זה שקול לתכונה שלכל קבוצת בורל $B \subseteq \mathbb{R}$ מתקיים $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$

משפט 0.6 אם $f, g : X \to \mathbb{R}$ (או $f, g : X \to [0, \infty]$) מדידות, אז גם $f + g$ מדידה.

הוכחה: נאמר עבור $\mathbb{R}$:

$X \overset{(f,g)}{\to} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \overset{+}{\to} \mathbb{R}$. כלומר $x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto (f(x) + g(x))$.

נראה שתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה מדידה.

תהי $u \subseteq \mathbb{R}$. כיוון שפונקציה החיבור רציפה, בתמוכה ההפוכה של u ב$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ פתוחה.

נותר להראות שעבור $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ פתוחה מתקיים $(f, g)^{-1}(G)$ מדידה. כל קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ היא איחוד בן מנייה של קבוצות פתוחות מהצורות $(a, b) \times (c, d)$.

(זאת כי כל הקבוצות מהצורה הנ"ל $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ הם בסיס ולכן מספיק לבדוק שלכל קבוצה מהצורה הנ"ל $(f, g)^{-1}((a, b) \times (c, d))$ מדידה.

$\{x|(f(x), g(x)) \in (a, b) \times (c, d)\} = f^{-1}((a, b)) \cap g^{-1}((c, d)) \in \mathcal{M}$. ∎

משפט 0.7 באותו אופן, גם $f \cdot g$ מדידה.

[1] "מי שידע לאיית לי לבג בצרפתית במבחן יקבל 10 נקודות" ד"ר נוביק

משפט 0.8 ההוכחה היא באותו אופן, אך צריך להזהר עם אינסוף. מה הבעיות עם אינסוף? נגדיר $0 \cdot \infty = 0$

משפט 0.9 גם כפל בסקלר עובדת כלומר $\alpha \cdot f$ מדידה.

"עכשיו מתחיל הקורס" ד"ר נוביק

משפט 0.10 תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות. $f_n : F \to \mathbb{R}$ (הטווח יכול להיות גם $[-\infty, \infty]$ או $[0, \infty]$) אזי $\sup\limits_n f_n$ מדידה.

הוכחה: בהנתן r, $(\sup f_n)(x) \le r$ אמ"מ $f_n(x) \le r$ לכל n. כלומר
$\mathcal{M} \ni \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \{x | f_n(x) \le r\} = \{x | (\sup f_n)(x) \le r\}$ ■

טענה 0.11 באופן דומה $\inf\limits_n f_n$ מדידה.

טענה 0.12 $\limsup f_n = \inf\limits_n \sup\limits_{k \ge n} f_k$ מדידה. באופן דומה $\liminf f_n$ מדידה.

טענה 0.13 אם קיים הגבול הנקודתי $f_n \to f$ אזי f מדידה כי $f = \limsup f_n$

הגדרה 0.14 יהי X מרחב מדידת $\varphi : X \to [0, \infty)$ תקרא פשוטה אם מתקבלים רק מספר סופי של ערכים.

נניח מתקבלים הערכים $a_1, .., a_n$, אם φ **מדידה** נקבל ש $\varphi^{-1}(\{a_i\})$ מדידה לכל $1 \le i \le n$.
מפ"א := מדידה, פשוטה ואי שלילית.

סימון

אם $A \subseteq X$, 1_A יסמן את הפוונקציה $X \to \mathbb{R}$ המוגדרת כך:
$$1_A := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$
נקראת הפונקציה הציינת של A.
מתי 1_A מדידה? אמ"מ A קבוצה מדידה.

סימון

אם φ מפ"א אזי נסמן $E_1, .., E_n$ את התמונות ההפוכות של הערכים השונים המתקבלים מלבד 0. נאמר $a_1 ... a_n > 0$ אזי $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 1_{E_i}$. זוהי הדרך היחידה להציג את הפונקציה כקומבינציה כאשר a_i שונים זה מזה ושונים מ0.

הגדרה 0.15 אם μ מידה על $\mathcal{M}$ וφ מוצג כנ"ל, נגדיר:

$$S(\varphi) := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

טענה 0.16 אם $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{E_i}$, E_i מדידות אבל a_i לאו דווקא שונים ולאו דווקא מ0 אז

$$S(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

טענה 0.17 נניח φ, ψ פמ"א (פונקציות מדידות אי שליליות) אז ע"י פיצול הקבוצות ניתן בה"כ ש

$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{E_i}$, $\psi = \sum_{i=1}^{n} b_i 1_{E_i}$, כלומר כאן מותר חזרות ומותר 0.

טענה 0.18 אם $\varphi \le \psi$ אז $S(\varphi) \le S(\psi)$

הוכחה: בהצגה עם אוסף משותף $E_1, .., E_n$ יתקיים $a_i \le b_i$ $1 \le i \le n$ ולכן

$$S(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) \le \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(E_i) = S(\psi)$$ ■

טענה 0.19 $S(\varphi + \psi) = S(\varphi) + S(\psi)$

הוכחה: אם נציג ע"י אוסף זר משותף $E_1, .., E_n$ וערכים $a_1, .., a_n$ $b_1, .., b_n$ ואז:

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) 1_{E_i}$$

$$S(\varphi + \psi) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$ ■

תרגיל

אם φ פמ"א, $a \ge 0$ אז $S(\alpha\varphi) = aS(\varphi)$

הגדרת האנטגרל של פונקציה מדידה אי שלילית

הגדרה 0.20 יהי $(X, \mathcal{M}, \mu)$ מרחב מידה. $f : X \to [0, \infty]$. נגדיר:

$\int f d\mu = \sup_{0 \le \varphi \le \psi} S(\varphi)$ על כל הפונקציות הפמ"א

טענה 0.21 נבדוק שעבור φ שהוא פמ"א מתקיים $\int \varphi d\mu = S(\varphi)$

הוכחה: צ"ל ש $S(\varphi) = S(\varphi)$ $\sup\limits_{0\le\varphi\le\psi}$.

($\ge$) כי φ נמצא שם

($\le$) כיוון שהראנו שאם $\varphi \le \psi$ אז $S(\psi) \le S(\varphi)$. ■

לכן מעתה לא נכתוב עוד $S(\varphi)$ אלא רק $\int \varphi d\mu$

הגדרת אינטגרל של פונקציה אי שלילית מדידה f על קבוצה מדידה E

יהי $(X, \mathcal{M}, \mu)$ מרחב מידה, $f : C \to [0, \infty]$ פונקציה מדידה. $E \in \mathcal{M}$ (כלומר קבוצה מדידה), נגדיר

$$\int\limits_E f d\mu = \int 1_E \cdot f d\mu$$

שימו לב,

$$\int\limits_X f d\mu = \int f d\mu$$

למה 0.22 תהי φ פמ"א, נגדיר לכל $E \in \mathcal{M}$,

$$\nu := \int\limits_E \varphi d\mu$$

אזי ν מידה על $\mathcal{M}$

הוכחה: כאשר $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 1_{F_i}$,

$$\nu(E) = \int\limits_E \varphi d\mu = \int 1_E \varphi d\mu = \int 1_E \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{F_i} = \int (\sum_{i=1}^{n} a_i 1_{E\cap F_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E \cap F_i)$$

כאשר מתרגיל מהבית מספיק להראות שהפונקציה $\nu_i(E) := \mu(E \cap F_i)$ היא מידה.

ואכן, אם $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ אוסף זר של קבוצות מדידות אזי

$$\nu_i(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k) = \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \cap F_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k \cap F_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_i(E_k)$$ ■

המשך הלמה

נובע מכך שאם ... $E_1 \subseteq E_2 \subseteq$ סדרה עולה של קבוצות ב$\mathcal{M}$ אז:

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k} \varphi d\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{E_k} \varphi d\mu$$

משפט ההתכנסות המונוטונית

תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות $f_n : X \to [0, \infty]$ מדידות כך ש $f_n \le f_{n+1}$ לכל n.
(כלומר זוהי סדרה של פונקציות מדידות אי-שלילות), אזי

$$\int (\lim f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

אנליזה מודרנית 1– הרצאה 5

ליאור פולק

7 בדצמבר 2016

טענה. f,g מדידות, $0 \le f \le g$. אזי $\int f d\mu \le \int g d\mu$.

הוכחה. אם $\varphi \le f$ פמ"א, ברור ש–$\varphi \le g$. לכן ה–sup שמגדיר את $\int g d\mu$ הוא על קבוצה גדולה יותר (ביחס להכלה).

אם $f \ge 0$ מדידה, $E \subseteq X$ מדידה, אזי $\int\limits_X f d\mu \le \int\limits_E f d\mu = \int\limits_X \mathbf{1_E} f d\mu$. זה נכון כי $\mathbf{1_E} f \le f$.

אם $f,g \ge 0$ מדידות, E מדידה ו–$f \le g$ ב–E, אזי $\int\limits_E f d\mu \le \int\limits_E f d\mu$. זה נכון כי $\mathbf{1_E} f \le 1_E g$.

משפט. (ההתכנסות המונוטונית)

תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות $f_n : X \to [0,\infty]$, כך ש–$f_n \le f_{n+1}$ לכל n. אזי

$$\int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

הוכחה.

לכל n מתקיים $f_n \le \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. לכן $\int f_n d\mu \le \int \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$. מכאן $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu \le \int \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$.

נוכיח את הכיוון השני.

נסמן $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, $l = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n d\mu$. צ"ל $l \ge \int f d\mu$.

אם כן תהא נתונה פונקציה פמ"א המקיימת $\varphi \le f$. יהי $0 < s < 1$ כלשהו.

נגדיר $E_n = \left\{x \middle| f_n(x) \ge s\cdot\varphi(x)\right\}$. זוהי בוודאי קבוצה מדידה, משום שניתן לרשום $E_n = \left\{x \middle| f_n - s\cdot\varphi \ge 0\right\}$.

הסדרה E_n מקיימת:

1. $E_n \subseteq E_{n+1}$ לכל n, מכיוון ש–f_n סדרה עולה.
2. $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. אם $\varphi(x) = 0$ אזי וודאי $f_n(x) \ge s\cdot\varphi(x)$ לכל n, וקיבלנו ש–x שייך <u>לכל</u> E_n, ובפרט לאיחוד. אחרת, $\varphi(x) > 0$. אזי $s\cdot\varphi(x) < \varphi(x) \le f(x)$ (זאת כי φ מקיימת $f \le \varphi$, ו–$0 < s < 1$). אבל $f_n(x) \to f(x)$, לכן יש n מספיק גדול כך שגם $f_n(x) \ge s\cdot\varphi(x)$. כלומר $x \in E_n$.

כעת,

$$l \ge \int f_n d\mu \ge \int\limits_{E_n} f_n d\mu \ge \int\limits_{E_n} s\varphi d\mu$$

לפי הלמות שהוכחנו לעיל. אבל, נשים לב:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} s\varphi d\mu = \int\limits_{X=\bigcup E_n} s\varphi d\mu$$

מכאן, $l \ge \int\limits_X s\varphi d\mu$. אבל $l \ge s\int\limits_X \varphi d\mu$, וזה נכון לכל $s < 1$, לכן $l \ge \int\limits_X \varphi d\mu$.

זה נכון לכל פמ"א φ, $0 \le \varphi \le f$, ולכן נכון ל–sup. כלומר, קיבלנו $l \ge \int\limits_X f d\mu$.

■

משפט. (הלמה של פאטו) (Fatou)

תהי $\{f_n\}$ סדרה של פונקציות מדידות, $f_n : X \to [0, \infty]$. אזי:

$$\int (\liminf f_n)\, d\mu \le \liminf \int f_n d\mu$$

הוכחה. נסמן $g_n = \inf\limits_{k \ge n} f_k$. מתקיים:

1. g_n מדידות
2. $0 \le g_n \le f_n$
3. g_n עולה
4. $\lim g_n = \liminf f_n$

g_n מקיימת את תנאי המשפט הקודם, ולכן:

$$\int (\liminf f_n)\, d\mu = \int (\lim g_n)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \le \liminf \int f_n d\mu$$

■

ניתן דוגמה מפריכה לכיוון השני של הלמה של פאטו.

$f_n = n \cdot \mathbf{1}_{\left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)}$, $X = [0,1]$. f_n סדרה מתכנסת. $\lim f_n = 0$, ולכן $\int (\lim f_n)\, d\mu = 0$.

אבל $\int f_n d\mu = 1$, ולכן $\lim \int f_n d\mu = 1$. מכאן, $0 = \int (\liminf f_n)\, d\mu < \liminf \int f_n d\mu = 1$.

משפט. תהי $f \ge 0$ מדידה. אזי קיימת סדרה עולה של פונקציות פמ"א שמתכנסת ל־f.

הוכחה. נגדיר

$$E_n^k = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right) \qquad F_n = \left(\bigcup_{k=1}^{n\cdot 2^n} E_n^k\right)^C$$

מכאן:

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbf{1}_{\mathbf{E_n^k}} + n \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{F_n}}$$

זוהי סדרה עולה, שגבולה f.

משפט. יהיו $f, g \ge 0$ מדידות. אזי:

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

הוכחה. תהי φ_n סדרה עולה של פונקציות פמ"א המתכנסת ל־f.

תהי ψ_n סדרה עולה של פונקציות פמ"א המתכנסת ל־g.

אזי $\varphi_n + \psi_n$ סדרה עולה של פונקציות פמ"א המתכנסת ל־$f+g$.

כעת:

$$\int (f+g)\, d\mu \underbrace{=}_{\text{Monotonic convergence theorem}} \lim \int (\varphi_n + \psi_n)\, d\mu \underbrace{=}_{\text{Integral additivity on p"ma functions}}$$

$$\lim \left(\int \varphi_n d\mu + \int \psi_n d\mu\right) = \lim \int \varphi_n d\mu + \lim \int \psi_n d\mu \underbrace{=}_{\text{Monotonic convergence theorem}} \int f d\mu + \int g d\mu$$

תרגיל. אפשר להוציא כפל בסקלר אי שלילי.

משפט. אם $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות $f_n : X \to [0,\infty]$, אזי:

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n d\mu\right)$$

הוכחה. נסמן $g_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$. $g_n \geq 0$ מדידות. הסדרה g_n עולה. ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל:

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \int \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) d\mu =$$

$$\underbrace{=}_{\text{Finite sum}} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\int f_k d\mu\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int f_k d\mu\right)$$

משפט. תהי $f \geq 0$ מדידה. נגדיר לכל $E \subseteq X$ מדידה את:

$$\nu(E) = \int\limits_E f d\mu$$

אזי ν היא מידה. כלומר, צ"ל שאם $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ אוסף קבוצות מדידות זרות, אזי

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\mu$$

הוכחה.

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}} \mathbf{E_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathbf{E_n}}$$

כי E_n זרות. לכן:

$$\mathbf{1}_{\bigcup\limits_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}} \mathbf{E_n}} \cdot f = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathbf{E_n}} \cdot f$$

ומכאן:

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n} f d\mu = \int \mathbf{1}_{\bigcup\limits_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}} \mathbf{E_n}} \cdot f d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathbf{E_n}} \cdot f d\mu = \sum_{n} \int\limits_{E_n} f d\mu$$

טענה. מידה היא גם σ תת–אדיטיבית. כלומר, אם $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מדידות, אזי:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

הוכחה. נגדיר $F_n = E_n - \bigcup\limits_{1\leq k\leq n-1} E_k$. F_n מדידות וזרות, $F_n \subseteq E_n$, $\bigcup F_n = \bigcup E_n$.

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \mu\left(\bigcup_n F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

טענה. תהי $f:X\to[0,\infty]$ מדידה. אם $\int fd\mu<\infty$, אזי $f^{-1}(\{\infty\})=\left\{x\middle|f(x)=\infty\right\}$ היא ממידה 0.

הוכחה. נסמן $E=f^{-1}(\{\infty\})$. אזי:

$$\int\limits_X fd\mu=\int\limits_E fd\mu+\int\limits_{E^C}fd\mu=\int\limits_E\infty d\mu+\underbrace{\int\limits_{E^C}fd\mu}_{\geq 0}$$

אם $\mu(E)>0$ אזי המחובר הראשון הוא ∞. זאת כי $\infty\cdot\mathbf{1_E}=n\cdot\mathbf{1_E}$. לכל n מתקיים $\int\mathbf{1_E}\cdot n=n\mu(E)$.

טענה. תהי $f:X\to[0,\infty]$ מדידה. נניח $\int fd\mu=0$. אזי $f=0$ כמעט בכל מקום (כ.ב.מ)

(**פרוש.** קיימת $E\subseteq X$ מדידה בעלת מידה 0 כך שעל E^C מתקיים התנאי שעליו אמרנו כ.ב.מ)

הוכחה. נסמן $E_n=\left\{x\middle|f(x)\geq\frac{1}{n}\right\}$. זוהי קבוצה מדידה. נראה שמידתה 0. ובכן מתקיים:

$$f\geq\frac{1}{n}\mathbf{1_{E_n}}$$

מכאן:

$$0=\int fd\mu\geq\int\frac{1}{n}\mathbf{1_{E_n}}d\mu=\frac{1}{n}\mu(E_n)\Rightarrow\mu(E_n)=0$$

אבל $\left\{x\middle|f(x)>0\right\}=\bigcup\limits_n E_n$. לכן:

$$\mu\left(\left\{x\middle|f(x)\geq\frac{1}{n}\right\}\right)\leq\sum_n\mu(E_n)=0$$

הגדרה. תהי $f: X \to [-\infty, \infty]$ מדידה. נגדיר $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = (-f)^+$. שתיהן פונקציות מדידות.

הגדרה. אם $\int f^+ d\mu$ ו–$\int f^- d\mu$ לא שניהם ∞, נגדיר $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$

הגדרה. f מדידה נקראת **אינטגרבילית** אם $\int f^+ d\mu$, $\int f^- d\mu$ שניהם סופיים.

מוטיבציה להגדרות דלעיל. $f = f^+ - f^-,\ |f| = f^+ + f^-$.

לכן: $\int |f|\, d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$.

מסקנה. f אינטגרבילית אמ"ם $\int |f|\, d\mu < \infty$.

מסקנה. $\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \Rightarrow \int f d\mu \leq \int |f|\, d\mu$

מסקנה. $-\int f d\mu \leq \int (-f)\, d\mu \leq \int |-f|\, d\mu = \int |f|\, d\mu$

מסקנה. $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$

סימון. אם $(X, \mathcal{M}, \mu)$ מרחב מידה, אזי אוסף כל הפונקציות האינטגרביליות על X מסומן $L^1(X)$ או $L^1(\mu)$ או L^1.

הגדרה. אם f היא ב–L^1 נגדיר

$$\|f\|_1 = \int |f|\, d\mu$$

טענה. L^1 הוא מרחב וקטורי, כאשר $\|\cdot\|_1$ היא כמעט נורמה על L^1.

יהיו $f, g \in L^1$. אזי:

$$\int |f+g|\, d\mu \leq \int (|f| + |g|)\, d\mu = \int |f|\, d\mu + \int |g|\, d\mu < \infty$$

לכן $f + g \in L^1$.

תרגיל. הוכיחו לגבי כפל בסקלר.

למעשה, כבר הראינו את אי שיוויון המשולש.

תרגיל. הראו התכנסות הנורמה לגבי סקלר.

ייתכן $f \not\equiv 0$ עם $\|f\|_1 = 0$. זאת בשל העובדה כי

טענה. $\|f\|_1 = 0$ אמ"ם $f \equiv 0$ כ.ב.מ

כדי להוכיח את הטענה, נגדיר יחס שקילות:

$$f \sim g \iff f = g \text{ almost everywhere}$$

תרגיל. זהו יחס שקילות. הפעולות והנורמה מוגדרות היטב, ומהוות מרחב וקטורי עם נורמה.

משפט. יהיו $f, g \in L^1$. אזי:

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

הוכחה. נסמן $h = f + g$. אנו יודעים כבר ש–$h \in L^1$. כעת

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

אלה מספרים סופיים כ.ב.מ, ולכן אפשר (כ.ב.מ) להעביר אגפים:

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

לכן:

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+$$

אלו מספרים סופיים כ.ב.מ, ולכן ניתן להגיד:

$$\left(\int h^+ - \int h^-\right) = \left(\int f^+ - \int f^-\right) + \left(\int g^+ - \int g^-\right)$$

אנליזה מודרנית- הרצאה 6

בשיעור שעבר הגדרנו

L^1 מרחב נורמי, עליו מוגדר אינטגרל.

טענה 0.1 הפונקציה $\int fd\mu \mapsto f$ עבור $f \in L^1$ היא רציפה.

הוכחה: עבור $f, g \in L^1$:

$$\left|\int fd\mu - \int gd\mu\right| = \left|\int (f-g)d\mu\right| \le \int |f-g|\, d\mu = ||f-g||_1$$

כלומר הפונקציה $\int fd\mu \mapsto f$ היא ליפשיץ עם קבוע 1 ובפרט רציפה. ■

מסקנה 0.2 אם $f_n \to f$ ב-L^1 (כמרחב נורמי) אז $\int f_n d\mu \to \int fd\mu$

משפט ההתכנסות הנשלטת

תהי $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ סדרת פונקציות מדידות,
$0 \le g \in L^1$ ו $|f_n| \le g$ לכל n (בפרט לכן כל $f_n \in L^1$),
ונניח $f_n(x) \to f(x)$ לכל x (ולכן גם $f \in L^1$ כי גם $|f| \le g$),
אזי $f_n \to f$ ב-L^1 (ולכן גם $\int f_n d\mu \to \int fd\mu$)

הוכחה: $|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g$, לכן:
$0 \le 2g - |f_n - f|$ לכן על סדרה זו מתקיימת הלמה של פטו.
$\int \liminf (2g - |f_n - f|)d\mu \le \liminf \int (2g - |f_n - f|)d\mu$

$$\int 2gd\mu \le \liminf \left(\int 2gd\mu - \int |f_n - f|d\mu\right) = \int 2gd\mu + \liminf \left(-\int |f_n - f|d\mu\right) =$$

$\int 2gd\mu - \limsup \int |f_n - f|d\mu$, לכן: $\limsup \int |f_n - f|d\mu$

ולכן: $\lim \int |f_n - f|d\mu = 0$, כלומר $||f_n - f||_1 \to 0$ ■

כרגע אין לנו עדיין שיטה לחשב אינטגרלים. אנחנו נרצה להוכיח שכל פונקציה אינטגרבילית–רימן, האנטגרל שלה שווה לאנטגרל רימן, ה"רגיל" שאנחנו מכירים.

משפט 0.3 אם f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$ אז f מדידה לבג ומתקיים:

$$\int_{[a,b]} f dm = \int_a^b f dx$$

הערה 0.4 עבור פונקציות פשוטות אנחנו יודעים שהמשפט מתקיים, כי יכולים לחשב אנטגרל על פונקציה פשוטה לפי לבג ולפי רימן ולראות שנקבל אותה תוצאה.

הוכחה: תהי φ_n סדרה של פונקציות מדרגות, $f \leq \varphi_n$ כך ש $\inf$ על הסכומים המתאימים לφ_n הוא $\int_a^b f dx$,

כלומר: $\int_a^b f dx = \inf\limits_n \int_{[a,b]} \varphi_m dm$

נסמן $\varphi = \inf \varphi_n$.

φ מדידה, $\varphi \leq \varphi_n$ לכל n לכן

$\int \varphi dm \leq \int \varphi_n dm$ לכל n, ולכן:

$$\int \varphi dm \leq \inf \int \varphi_n dm = \int_a^b f dx$$

וכן $f \leq \varphi$.

באותו אופן יש $\psi \leq f$ מדידה כך ש:

$$\int_{[a,b]} \psi dm \geq \int_a^b f dx$$

$$\int_{[a,b]} \varphi dm \leq \int_a^b f dx \leq \int_{[a,b]} \psi dm \leq \int_{[a.b]} \varphi dm$$

(המעבר האחרון נובע מכך ש $\psi \leq \varphi$)

$$\int_{[a,b]} \varphi dm = \int_a^b f dx = \int_{[a,b]} \psi dm$$

$\psi \geq \varphi$ לכן $- \geq \varphi - \psi$, אבל $\int (\varphi - \psi) dm = 0$ ולכן

$\varphi - \psi = 0$ כ.ב.מ (כמעט בכל מקום), כלומר $\psi = \varphi$ כ.ב.מ.

אולם, $\varphi \leq f \leq \psi$ מכאן ש $f = \varphi$ כ.ב.מ.

נקבל ש f מדידה (בעזרת הלמה שתוצג בעמוד הבא). $\varphi \leq f \leq \psi$, לכן:

$$\int \psi dm \leq \int f dm \leq \int \varphi dm$$

כלומר: $\int f dm = \int \varphi dm = \int_a^b f dx$ ■

תזכורת-מרחב שלם

מרחב יקרא שלם אם תת קבוצה של קבוצה שמידתה 0 היא מדידה (ובפרט, מידתה 0)

למה 0.5 אם X מרחב שלם, φ מדידה ו$f = \varphi$ כמעט בכל מקום, אז גם f מדידה.

הוכחה: תרגיל. ■

דוגמא נגדית (כאשר תנאי המשפט לא מתקיימים, X לא שלם)

E מדידה עם מידה 0, $A \subseteq E$ לא מדידה, ניקח את 1_A (שאינה מדידה) ואת פונקצית האפס.

סוגי התכנסויות

הגדרנו:

1. התכנסות נקודתית (כ.ב.מ)
2. התכנסות במידה שווה
3. התכנסות בL^1
4. כעת נגדיר: התכנסות כמעט במידה שווה.

הגדרה 0.6 נאמר ש $f_n \to f$ **כמעט במ"ש,** אם לכל $\delta > 0$ יש E מדידה עם $\mu(E) < \delta$ כך ש $f_n \to f$ במ"ש על E^c

דוגמא

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$
אין התכנסות במידה שווה (לדוגמא כי אם היה מתכנס במש אז פונקצית הגבול הייתה רציפה, והיא לא)
אבל אם נזרוק סביבה כלשהי (קטע באורך δ) של 1, נקבל שf_n מתכנסת במ"ש ל f.
(לכל $\epsilon > 0$ שנבחר, נוכל לזרוק קטע באורך δ כך שהחל מn מסויים, $f_n(x) < \epsilon$, כי $(1-\delta)^n \to 0$)

משפט 0.7 התכנסות כמעט במ"ש $\Leftarrow$ התכנסות כ.ב.מ (נקודתית)

הוכחה: לכל k יש E_k מדידה כך ש $\mu(E_k) \leq \frac{1}{k}$ ו $f_n \to f$ במ"ש על E_k^c, בפרט $f_n(x) \to f(x)$ לכל $x \in E^c$. לכן, $f_n(x) \to f(x)$ לכל x ב $\underset{k\in\mathbb{N}}{\cup} E_k$ אם

$\underset{k\in\mathbb{N}}{\cup} E_k^c = \left(\underset{k\in\mathbb{N}}{\cap} E_k\right)^c$ אולם, $\mu\left(\underset{k\in\mathbb{N}}{\cap} E_k\right) = 0$ ■

משפט 0.8 אם $\mu(X) < \infty$ ו$f_n \to f$ במ"ש, אז $f_n \to f$ ב L^1.

הוכחה: $f_n \to f$ במ"ש פירושו ש $\underset{x}{\sup}|f_n(x) - f(x)| \to 0$

$$||f_n - f||_1 = \int|f_n - f|d\mu \leq \int \underset{x}{\sup}|f_n - f|d\mu = \mu(X)\underset{x}{\sup}|f_n - f| \to 0$$ ■

משפט אגורוף

אם $\mu(x) < \infty$ אז התכנסות כ.ב.מ $\Leftarrow$ התכנסות כמעט במש

הוכחה: תהי $f_n \to f$ כ.ב.מ, כלומר יש G מדידה עם $\mu(G) = 0$ כך ש $f_n(x) \to f(x)$ לכל $x \in G^c$.

יהי $\delta > 0$ נתון. צריך למצוא A מדידה עם $\mu(A) < \delta$ כך ש $f_n \to f$ במ"ש על A^c, כלומר לכל $\epsilon > 0$ יש N כך שכל $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ לכל $x \in A^c$.

מספיק להראות עבור כל $\epsilon > 0$ מהצורה $\frac{1}{m}$. יהי m נתון.

נסמן $A_n^m := \left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}\right\}$. נסמן $E_n^m := \underset{k\geq n}{\cup} A_k^m$

הסדרה E_n^m סדרה יורדת של קבוצות (ב n). כלומר, $E_n^m \supseteq E_{n+1}^m$.

נסמן: $F = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} E_n^m$

לכל $x \in F$ $f_n(x) \nrightarrow f(x)$ (הגדרת ההתכנסות נכשלת עבור $\epsilon = \frac{1}{n}$)

לכן $F \subseteq G$ לכן $N(F) = 0$. כיוון $\mu(x) < \infty$ והסדרה E_n^m יורדת מתקיים:

$0 = \mu(E) = \lim_{n\to\infty}\mu(E_n^m)$, לכן יש $N(m)$ כך ש $\mu\left(E_{N(m)}^m\right) < \frac{\delta}{2^m}$

לכל $x \ni \left(E_{N(m)}^m\right)^c$ מתקיים שלכל $n \geq N(m)$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}$

נסמן $A = \underset{m}{\cup} E_{n(m)}^m$

$$\mu(A) \leq \sum_m \mu\left(E_{N(m)}^m\right) < \delta$$

אזי: $A^c = \cap\left(E_{N(m)}^m\right)^c$

בפרט, בהנתן m מתקיים $A^c \subseteq \left(E_{N(m)}^m\right)^c$

ולכן לכל $x \in A^c$ מתקיים שלכל $n \geq N(m)$

$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}$ ■

סיכום גרירות של התכנסויות

- במ"ש $\Leftarrow$ כמעט במ"ש $\Leftarrow$ נקודתית כ.ב.מ
- נקודתית$\Leftarrow$ נקודתית כ.ב.מ
- במ"ש $\Leftarrow$ נקודתית
- במרחב מידה סופי: במ"ש $\Leftarrow$ התכנסות L^1
- במרחב מידה סופי: התכנסות כ.ב.מ $\Leftarrow$ התכנסות במ"ש.

דוגמאות נגדיות

1. $f_n(x) = x^n$ מתכנסת כמעט במידה שווה וגם L^1 אבל לא במש.
2. $f_n(x) = n1_{(0,\frac{1}{n})}$ מתכנסת כמעט במ"ש, לא בL^1 ולא במ"ש.
3. $\{f_n(x)\} = 1_{[0,1]}, 1_{[0,\frac{1}{2}]}, 1_{[\frac{1}{2},1]}, 1_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}, 1_{[\frac{2}{3},1]}, 1_{[0,\frac{1}{4}]}$ מתכנסת בL^1, אבל לא נקודתית (בשום מקום!)
4. $\frac{1}{n}1_{[0,n]}$ מתכנסת במ"ש אבל לא בL^1.
5. $1_{[n,n+1]}$ נקודתית (בכל מקום), לא כמעט במש ולא L^1
6. $1_{[n,n+\frac{1}{n}]}$ יש התכנסות נקודתית כ.ב.מ ויש התכנסות בL^1 אבל אין התכנסות כמעט במידה שווה.

הערה 0.9 שלוש הדוגמאות הראשונות הן מ$[0,1]$ ל$\mathbb{R}$ והשלוש האחרונות מ$\mathbb{R}$ ל$\mathbb{R}$

דיון

תהי $\mathcal{A}$ אלגברה ועליה מידה μ σ- אדיטיבית.

תהי $\mathcal{M}$ הσ-אלגברה וl המידה המתקבלת מהבניה של קותאודורי (תהליך ההרחבה).

תהי $B \in \mathcal{M}$ עם $l(B) < \infty$, כלומר לכל m קיים כיסוי $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ של קבוצות מ$\mathcal{A}$.

$B \leq \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i$ כך ש $l\left(\underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} l(E_i) < l(B) + \frac{1}{m}$

נסמן $E = \underset{i\in\mathbb{N}}{\cup} E_i$ אזי

$B \subseteq E$ ו $l(E) \leq l(B) + \frac{1}{m}$

E איחוד בן מניה של קבוצות מ$\mathcal{A}$, כלומר נסמן $E \in \mathcal{A}_\sigma$.

את E שמתאימה ל $\frac{1}{m}$ נסמן E^m ונגדיר $F = \underset{m\in\mathbb{N}}{\cap} E^m$.

$B \subseteq F$, $l(B) = l(F)$ ל $F \in \mathcal{A}_\sigma$.

כיוון ש $l(A) < \infty$ לכן $l(F-B) = 0$

טענה 0.10 תהי $\mathcal{A}$ אלגברה ועליה מידה μ σ- אדיטיבית.

תהי $\mathcal{M}$ הσ-אלגברה וl המידה המתקבלת מהבניה של קותאודורי (תהליך ההרחבה).

תהי $B \in \mathcal{M}$ עם $l(B) < \infty$, אזי:

1. $B \subseteq F$

$l(F-B) = 0$

אנליזה מודרנית- הרצאה 7

נתונים $(X,\mathcal{M},\mu),(Y,\mathcal{N},\nu)$.
נרצה להגדיר מידה על $X\times Y$. נסמן: $C:=\{A\times B:A\in\mathcal{M},B\in\mathcal{N}\}$
$(A\times B)\cap(A'\times B')=(A\cap A')\times(B\cap B')$
נגדיר מידה על המכפלה: $\lambda(A\times B)=\mu(A)\times\nu(B)$

טענה 0.1 λ σ-אדיטיבית על C.

הוכחה: נניח

$$A\times B=\biguplus_{n\in\mathbb{N}}A_n\times B_n$$

$$1_{A\times B}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}1_{A_n\times B_n}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}1_{A_n}(x)\cdot 1_{B_n}(y)$$

לכל x קבוע נקבל שוויון בין שתי פונקציות על Y.

$$\int_Y 1_{A\times B}(x,y)d\nu=\sum_n 1_{A_n(x)}\int_Y 1_{B_n}(y)$$

$$\nu(B)1_A(x)=\sum 1_{A_n}(x)\nu(B_n)$$

נבצע אינטגרל על x

$$\lambda(A\times B)=\nu(A)\mu(A)=\int_X\nu(B)1_A(x)d\mu=\sum_n\nu(B_n)\int_X 1_{A_n}(x)=\sum_n\nu(B_n)\mu(A_n)=\sum_n\lambda(A_n\times B_n)$$

מהבניה של קרתאודורי נקבל σ-אלגברה $\mathcal{L}$ על $X\times Y$ והרחבה של λ ל-$\mathcal{L}$ שהיא מידה שלמה. ■

מטרה

להגדיר ולחשב אנטגרל על $f : X \times Y \to \mathbb{R}$

דוגמא

$X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = P(\mathbb{N})$

$\mu(\{a\}) = 1$ $\forall a \in X$

נתבונן ב $X \times X$: $\{a\} \times \{b\} = \{(a,b)\}$

ה-σ-אלגברה המתקבלת היא $P(X \times X)$

נתבונן ב: $f : X \times X \to \mathbb{R}$

$$\int\limits_{X \times X} f d\lambda = \sum_{n,m} f(n,m)$$

בתנאים שהרשינו.

דוגמא

נגדיר $f(n,m) := \begin{cases} 1 & n = m \\ -1 & n+1 = m \\ 0 & else \end{cases}$

כעת נראה שלא ניתן להחליף את סדר האינטגרציה:

$$\int f = \sum_m \sum_n f = 0$$

אבל

$$\int f = \sum_n \sum_m = 1$$

משפט פוביני

יהיו $(X,\mathcal{M},\nu)$ $(Y,\mathcal{N},\nu)$ שני מרחבי מידה שלמים
יהי $(X\times Y,\mathcal{L},\lambda)$ מרחב המידה השלם שבנינו (בעזרת משפט קרתאודורי).
תהי $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית
אזי כמעט לכל x הפונקציה $y\mapsto f(x,y)$ אינטגרבילית כפונקציה על Y והפונקציה

$$x\mapsto\int\limits_Y f(x,y)d\nu$$

היא אינטגרבילית, ומתקיים:

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d\lambda=\int\limits_X\left(\int\limits_Y f(x,y)d\nu\right)d\mu$$

וכנ"ל בהחלפת תפקידי X ו־Y

הוכחה: נוכיח בשלבים[1]. ראשית על פונקציות מציינות.
נתחיל מפונקציות מציינות של קבוצות מהצורה $A\times B$ כאשר $A\in\mathcal{M},B\in\mathcal{N}$
עבור $E\subseteq X\times Y$ ו־$x\in X$ נגדיר

$$E_x:=\{y\in Y:(x,y)\in E\}$$

עבור x נתון נסמן $i_x:Y\to X\times Y$ את הפונקציה

$$i_x(y):=(x,y)$$

במונחים של פונקציה זו:

$$E_x=(i_x)^{-1}(E)$$

עבור x נתון:

[1]"המתמטיקה היא טריוויאלית מקומית"

$$\int_Y 1_E(x,y)d\nu = \nu(E_x)$$

נסמן ב $g_E : X \to \mathbb{R}$ את הפונקציה:

$$g_E(x) := \nu(E_x)$$

כלומר,

$$g_E(x) = \int_Y 1_E(x,y)d\nu$$

לכן המטרה שלנו להראות שלכל $E \subseteq X \times Y$ מדידה עם מידה סופית,

$$\lambda(E) = \int_X g_E(x)d\mu$$

$$g_{A\times B}(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ \nu(B) & x \in A \end{cases} = \nu(B)1_A(x)$$

$$\int_X g_{A\times B}(x)d\mu = \nu(B)\mu(A)$$

נזכר בסימון:

C_σ איחודים בני מנייה של קבוצות מC.

$C_{\sigma\delta}$ חיתוכים בני מנייה של קבוצות מ C_σ

הערה:

אם לכל $E \in C_{\sigma\delta}$ אז לכל x, E_x מדידה ב Y

א. עבור $E \in C_\sigma$, $F_n \in C$, $\left(\underset{n}{\cup} F_N\right)_x = \underset{n}{\cup} F_{n_x}$

נניח $\{E_n\}$ סדרת קבוצות ב C. נראה שהנוסחה שלנו לחישוב $\lambda\left(\underset{n}{\cup} E_n\right)$נכונה.

$\underset{n}{\cup} E_n$ היא איחוד זר של קבוצות F_n ב C.

$A_1, .., A_n$

$A_n - (A_1 \cup .. \cup A_{n-1})$

הוא איחוד זר של קבוצות מ C.

$$A_n \cap (A_1 \cup .. \cup A_{n-1})^c$$
$$A_n \cap A_1^c \cap .. \cap A_{n-1}^c$$
$$A_n \cap \left(\biguplus F_1^i\right) \cap \biguplus F_2^i \cap ..$$
$$E = \biguplus_n F_n$$
$$1_E = \sum_n 1_{F_n}$$
$$g_E = \sum_n g_{F_n}$$
לכן

$$\int g_E d\mu = \sum_n \int g_{F_n} d\mu = \sum_n \lambda(F_n) = \lambda(E)$$

נניח E_n סדרת קבוצות ב C_σ, נסמן:

$$A = \bigcap_n E_n$$

נרצה לראות ש ($\lambda(A) < \infty$)

$$\int_X g_A d\mu = \lambda(A)$$

שלב טכני:
ניתן להניח ש E_n סדרה **יורדת** של קבוצות ב C_σ **מדידה סופית**
$\int g d\mu = \lambda(E) < \infty$
מכאן ש g_{E_1} סופית כ.ב.מ ∎

משפט טונלי

X, Y מרחבי מידה שלמים σ-סופיים,
$0 \leq f : X \times Y \to \mathbb{R}$ אך אולי עם אנטגרל ∞
כאשר במקום שאמרנו במשפט פוביני.
את המילה "אינטגרבילי" או "אינטגרבילי ב.כ.מ". נאמר כעת "מדידה" "מדידה.."

אנליזה מודרנית- הרצאה 8

מרחבי L^p

נתחיל מלדבר על פונקציות מדידות $f:X\to\mathbb{C}$ (יאיי!)

הגדרה 0.1 $f:X\to\mathbb{C}$ **מדידה** אם תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה מדידה.

הערה 0.2 נוכל לרשום $f=g+ih$ כאשר $g,h:X\to\mathbb{R}$

תרגיל f מדידה אם ורק אם g,h מדידות.

הגדרה 0.3 $f:X\to\mathbb{C}$ **אנטגרבילית** אם $\int|f|d\mu<\infty$

טענה 0.4 f אנטגרבילית אם ורק אם $\mathrm{Im}f,\ \mathrm{Re}f$ אנטגרביליות.

הוכחה: נסמן $f=g+ih$. $|g|,|h|\le|f|$, מצד שני $|f|\le|g|+|h|$. ■

הגדרה 0.5 כאשר f אנטגרבילית, $f=g+ih$, האנטגרל של f הוא

$$\int fd\mu=\int gd\mu+\int hd\mu$$

הגדרה 0.6 תהי $f:X\to\mathbb{R}$ או $f:X\to\mathbb{C}$. עבור $p\ge1$ נגדיר

$$||f||_p:=\left(\int|f|^pd\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

הגדרה 0.7 L^p יסמן את אוסף כל הפונקציות כל ש $||f||_p<\infty$
(או: מחלקת השקילות כאשר $f\sim g$ אםמ $f=g$ כ.ב.מ)

טענה 0.8 אם $f,g \in L^p$ אז $f+g \in L^p$.

הוכחה:

$$|f+g| \le |f| + |g| \le 2\max\{|f|,|g|\}$$

$$|f+g|^P \le 2^p\left(|f|^p,|g|^p\right) \le 2^p\left(|f|^p + |g^p|\right)$$

$$\int |f+g|^P d\mu \le 2^P\left(\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu\right)$$

בפרט אם $f,g \in L_p$ אז $f+g \in L^p$ ∎

הערה 0.9 אם $f = g+ih$ אז $f \in L^p$ אמ"מ $g,h \in L^p$. $|g|,|h| \le |f|$ לכן סיימנו עם $(\Leftarrow)$
מצד שני, אם $h \in L^p$ גם ih^p כי $|ih| = |h|$, לכן $L^p \ni f = g+ih$

אי שוויון הולדר

בהנתן $p,q > 1$ כך ש $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$||f \cdot g||_1 \le ||f||_p ||f||_q$$

(גם כאשר אחד הצדדים ∞)

אי שוויון הממוצעים

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b$$

הוכחה:

$$\frac{1}{p}\ln a + \frac{1}{q}\ln b \le \ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right)$$

נציב $a = x^p, b = y^p$ ונקבל

$$x \cdot y \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

∎

נחזור להוכחת אי שוויון הולדר

הוכחה: נסמן

$$u = \frac{f}{||f||_p}, \quad v = \frac{g}{||g||_q}$$

אזי

$$||u||_p = 1, \qquad ||v||_q = 1$$

צ"ל

$$||u \cdot v|| \leq 1$$

מתקיים לכל $x \in X$

$$|u||v| \leq \frac{1}{p}|u|^p + \frac{1}{q}|v|^p$$

לכן

$$\int |uv| d\mu \leq \frac{1}{p}\int |u|^p d\mu + \frac{1}{q}\int |v|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

■

אי שוויון מינקובסקי

יהי $p>1$,

$$||f+g||_p \le ||f||_p + ||g||_p$$

(גם כאשר הנורמות הנל ∞)

הוכחה: נעזר בבן הזוג q כך ש

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$\frac{p+q}{pq}=1$$

$$p+q=p\cdot q$$

$$|f+g|^p \le |f+g|^{(p-1)}\left(|f|+|g|\right) = |f+g|^{\frac{1}{p}}|f| + |f+g|^{p-1}|g|$$

$$\int (f+g)^{p-1} d\mu \le \left(\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

באותו אופן

$$\int |f+g|^{p-1}|g| d\mu \le \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

ביחד

$$\int |f+g|^p d\mu \le \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(||f||_p + ||g||_p\right)$$

$$||f+g||_p = \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le ||f||_p + ||g||_p$$

$\blacksquare$

משפט 0.10 אם $f_n \in L^p$ סדרת קושי, אזי יש ל $\{f_n\}$ תת סדרה מתכנסת כ.ב.מ.

הוכחה: f_n סדרת קושי לכן יש n_1 כך שלכל $k \geq n_1$, $||f_k - f_{n_1}||_p \leq \frac{1}{2}$
קיים $n_2 > n_1$ כך שלכל $k \geq n_2$ מתקיים

$$||f_k - f_{n_2}||_p \leq \frac{1}{4}$$

קיימים $n_3, ..$ כך ש

$$||f_k - f_{n_3}||_p \leq \frac{1}{8}$$

וכך הלאה. כעת,

$$||f_{n_1}||_p + \sum_{n=1}^{\infty} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq ||f_{n_1}||_p + 1 := A$$

נסמן

$$g_m = |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

$$g = \lim_{m\to\infty} g_m = |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$$

לכן

$$g_m^p \nearrow g^p$$

$$\int g^p d\mu = \lim_{m\to\infty} \int g_m^p d\mu = \lim_{n\to\infty} ||g_m||_p^q \leq \lim_{m\to\infty} \left(||f_{m_1}||_p + \sum_{k=1}^{\infty} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|| \right) \leq A^p \leq \infty$$

לכן $\int g^p d\mu < \infty$ לכן g^p סופית כ.ב.נ כלומר g סופית כ.ב.מ. בפרט, כ.ב.מ, הטור

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right)$$

כלומר כ.ב.מ קיים הגבול

$$\lim_{m\to\infty} f_{n_1}+\sum_{k=1}^{m}\left(f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\right)=\lim_{m\to\infty} f_{n_{m+1}}$$

נסמן את גבולה ב h (כלומר נשלים ע"י 0 במקום שg הייתה ∞) ■

משפט 0.11 L^p שלם

הוכחה: תהי $\{f_n\}$ סדרת קושי ב L^p. מהמשפט הקודם קיימת $h\in L^p$ ותת סדרה f_{n_k} כך ש $h \to f_{n_k}$ כ.ב.מ.

נראה ש $f_n \to h$ ב L^p.

יהי $\epsilon > 0$. קיים N כך שלכל $k,l \geq N$,

$$||f_k - f_l||_p < \epsilon$$

בפרט זה נכון לכל $N \leq n_k$ (האנדקסים מתחת לסדרה).

$h \underset{k\to\infty}{\to} f_{n_k}$ כ.ב.מ,

$|f_{n_k}-f_l|^p \to |h-f_l|^p$ כ.ב.מ

$$||h-f_l||^p=\int|h-f_l|^p d\mu=\int\lim_{k\to\infty}|f_{n_k}-f_l|^p d\mu\leq\liminf_{k\to\infty}\int|f_{n_k}-f_l|^p\,d\mu=$$

$$=\liminf_{k\to\infty}||f_{n_k}-f_l||_p^q\leq\epsilon^p$$

ביחד $||h-f_l||_p \leq \epsilon$

כלומר $f_n \to h$ בL^p ■

הגדרה 0.12 נסמן ב l^p את $L^p(X)$ כאשר X הוא $\mathbb{N}$ עם המידה שבה מידת כל יחידון הוא 1, כלומר סדרות $\{a_n\}$ שמקיימות $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^p<\infty$ ואז

$$||\{a_n\}||_p:=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

אי שוויון הולדר ב l^p

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

הערה 0.13 הנורמה אותה הכרנו בקורסים קודמים על $\mathbb{R}^n$ ע"י

$$||(x_1,..,x_n||=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

היא מקרה פרטי עבור מרחב עם n נקודות שהמידה של כל נקודון היא 1.

הגדרה 0.14 $r\geq 0$ חַסם כ.ב.מ של f. אם $\mu\left(\{x:|f|>r\}\right)=0$

הגדרה 0.15 $||f||_\infty:=\inf\{\text{r}|f$ חסם כמעט בכל מקום של $r\}$

טענה 0.16 $||f||_\infty$ הוא חסם כ.ב.מ של f

הוכחה:

$$\{x|f(x)>||f||_\infty\}=\underset{n}{\cup}\left\{x:f(x)>||f||_\infty+\frac{1}{n}\right\}$$

נסמן בL^∞ קבוצת כל הf כך ש $||f||_\infty<\infty$ ∎

טענה 0.17 L^∞ סגורה תחת חיבור וכפל בסקלר.

הוכחה: תרגיל ∎

משפט 0.18 גם L^∞ שלם.

הוכחה: תהי f_n סדרת קושי ב L^∞. לכל m,n יש קבוצה מדידה E_{nm} שמידתה 0 כך ש

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty$$

לכל $x \in E_{nm}^c$.

$A = \underset{n,m}{\cup} E_{nm}$ אז $\mu(A) = 0$ וב A^c, $||f_n - f_m||_\infty$ היא חסם ל $f_n(x) - f_m(x)$ לכל m, n.

לכן, לכל $x \in A^c$, $f_n(x)$ סדרת קושי.

אולם, $f_n(x)$ סדרת קושי ב $\mathbb{C}$. קיים לה גבול $g(x)$ (נשלים ע"י 0 ב A). ■

$$|g(x) - f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(x)|$$

בהנתן $\epsilon > 0$, קיים $N \geq 0$ כך שאם $N \leq m, n$ אז $||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$ ולכן לכל $x \in A^c$, $|f_n(x) - f_m(x)|$ ולכל עבור $n > N$

$$|g(x) - f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$$

לכל $x \in A^c$ לכן

$$||g - f||_\infty \leq \epsilon$$

אי שוויון הולדר עבור הזוג $\infty \Leftrightarrow 1$

הוכחה: יש E שמידתה 0 כך ש $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ לכל $x \in E^c$.

$$\int |fg| d\mu \leq \int ||f||_\infty |g| d\mu = ||f||_\infty \int |g| d\mu = ||f||_\infty ||g||_1$$

■

מרחבי הילברט

הגדרה 0.19 מרחב הילברט הוא מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ שבו המטריקה המושרית ע"י הנורמה המושרית ע"י המכפלה הפנימית היא **שלמה**

דוגמא

על $L^2(x)$ נגדיר מכפלה פנימית באופן הבא:

$$< f, g >:= \int \overline{f} g d\mu$$

הערה 0.20 $f\overline{g}$ אנטגרבילית כי מאי שוויון הולדר עבור $p = q = \frac{1}{2}$

$$\int |\overline{f}g| d\mu \leq ||\overline{f}||_2 \cdot ||\overline{g}||_2 < \infty$$

הערה 0.21 בפרט נוכל לדבר על l^2, כאן

$$< (a_n), (b_n) >= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n$$

אנליזה מודרנית- הרצאה 9

יהי V מרחב מכפלה פנימית. $A \subseteq V$ $x \in V$. אנו נאמר ש x ניצב לA ונסמן $x \perp A$ אם $<x,a>=0$ לכל $a \in A$.
נסמן ב $A^{\perp}$ את הקבוצה $\{x \in V | x \perp A\}$.

טענה 0.1 זוהי קבוצה סגורה

הוכחה:

$$A^{\perp} = \underset{a \in A}{\cap} \{a\}^{\perp}$$

לכן מספיק להראות ש $\{a\}^{\perp}$ קבוצה סגורה. ההעתקה $x \mapsto <a,x>$ היא רציפה.

$$| <a,x> - <a,y> | = |<a, x-y>| \leq ||a|| \cdot ||x-y||$$

$a^{\perp}$ היא התמונה ההפוכה של $\{0\}$ תחת העתקה זו ולכן סגורה. ■

טענה 0.2 אם $W \subseteq V$ תת מרחב (מרוכב) אזי $x \perp W$ אמ"מ $\text{Re} <x,w>=0$ לכל $w \in W$

הוכחה: $<x,w>=0$ אמ"מ $\text{Re} <x,w>=0$ $\text{Im} <x,y>=0$.

$$\text{Im} <x,w> = -\text{Re} <x, iw>$$

■

טענה 0.3 יהי V מרחב מכפלה פנימי. $W \subseteq V$ תת-מרחב. $x \in V$ אז $w \in W$ מקיים ש $||x-y|| \leq ||x-u||$ לכל $u \in W$ אם ורק אם $x - w \perp W$

הוכחה: <u>כיוון אחד:</u>

$$||x-u||^2 = <x-u, x-u> = <(x-w)+(w-u), (x-w)+(w-u)> =$$

$$=< x-w, x-w > + < w-u, w-u >= ||x-u||^2 + ||w-u||^2$$

$$||x-u|| = \sqrt{||x-w||^2 + ||w-u||^2} \geq ||x-w||$$

ואם $w \neq u$ אז $<$ (קטן ממש). ■

הגדרה 0.4 $A \subseteq V$ נקראת קמורה אם לכל $x, y \in A$ גם הקטע המחבר ביניהם, כלומר $\{sx + (1-s)y | 0 \leq s \leq 1\}$, נמצא ב A.

הגדרה 0.5 אם $A \subseteq V$ ו$x \in V$ נסמן

$$d(x, A) := \inf\{||x-a|| : a \in A\}$$

משפט 0.6 יהי H מרחב הילברט. $A \subseteq H$ קמורה וסגורה ויהי $x \in H$ אזי קיים $a \in A$ המקיים

$$||x-a|| = d(x, A)$$

הוכחה: מהגדרת $\inf$ קיימת סדרה $a_n \in A$ כל ש

$$\lim ||x-a_n|| = d(x, A)$$

נוכיח ש a_n סדרה קושי. זאת נוכיח בעזרת גאומטריה אוקלידית במישור, לא הצלחתי לכתוב מסודר.

כעת H שלם ולכן a_n מתכנסת לנקודה a. A סגורה לכן $a \in A$.

מרציפות הנורמה נקבל ש $d(x, a) = d$. ■

מסקנה 0.7 יהי H מרחב הלברט, $W \subseteq H$ תת מרחב סגור אזי קיים $a \in W$ יחיד המקיים $||x-a|| = d(x, w)$ ומתקיים $(x-a) \perp W$

הגדרה 0.8 עבור תתי מרחבים $A, B \subseteq V$ אנו אומרים ש $V = A \oplus B$ אם $A + B = V$ ו $A \cap B = \{0\}$ (מתקיים אם ורק אם יש a, b יחידים כך ש $x = a + b$)

משפט 0.9 יהי H מרחב הילברט, $w \subseteq H$ תת מרחב סגור אזי $H = W \oplus W^{\perp}$

הוכחה: א. $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ כי אם $x \in W \cap W^{\perp}$ אז $< x, x >= 0$ ולכן $x = 0$.

ב. יהי $x \in H$ אזי מהמשפט הקודם יש $a \in W$ כך ש $(x-a) \perp W$, $x = a + (x-a)$ ■

משפט ריס

יהי H מרחב הלברט. $\varphi : H \to \mathbb{C}$ פונקציונאל ליניארי <u>רציף</u>. אזי קיים $v \in H$ כך ש $\varphi(x) =< v, x >$ לכל $x \in H$.

הוכחה: נסמן $W = \ker \varphi$ אזי W תת מרחב סגור, לכן $H = W \oplus W^{\perp}$.
$W^{\perp} \cap W = \{0\}$ לכן $\ker(\varphi|_{W^{\perp}}) = \{0\}$ לכן $\varphi|_{E^{\perp}} : W^{\perp} \to \mathbb{C}$ חח"ע.
לכן, $\dim (W^{\perp}) \leq 1$. אם $\dim W^{\perp} = 0$ אז $W = H$ לכן $\varphi = 0$ וניקח $v = 0$.
אם $\dim W^{\perp} = 1$ ניקח $0 \neq u \in W^{\perp}$ אזי $< u, u > \neq 0$, ולכן יש סקלר a כך ש $< au, u >= \varphi(u)$. ניקח $v = au$ ומתקיים $< v, u >= \varphi(u)$ ולכן $< v, x >= \varphi(x)$ לכל $x \in W^{\perp}$, וכן מתקיים $\varphi(x) = 0 =< v, x >$ לכל $x \in W$.
ולכן $< v, x >= \varphi(x)$ לכל $x \in H$. ∎

הערה 0.10 המשפט נכון גם עבור מרחבי הילברט ופונקציונלים ממשיים.

הגדרה 0.11 מרחב מטרי נקרא **ספרבילי** אם יש בו קבוצה צפופה בת מנייה.

הגדרה 0.12 מרחב הילברט נקרא ספרבילי אם כמרחב מטרי הוא ספרבילי.

טענה 0.13 התכונות הבאות על H שקולות:

1. H ספרבילי
2. יש $A \subseteq H$ בת מנייה כך ש $\text{span}A$ צפוף ב H.
3. יש $A \subseteq H$ אורתונורמלית[1] בת מנייה כך ש $\text{span}A$ צפוף ב H.

הוכחה: <u>**2 ⇐3**</u>
נניח $A = v_1, v_2, v_3, ..$, $\text{span}A$ צפוף ב H. נבצע שתי פעולות על הרשימה:
1. דילול
2. גרהאם שמידט

<u>**3⇐2**</u>
יהי H מרחב הילברט ספרבילי. $\{v_1, ..\}$ סדרה אורתונורמלית שה span שלה צפוף ב H. בהנתן $x \in H$, לכל n נביט בוקטור

$$x_n := \sum_{j=1}^{n} < v_j, x > v_j$$

[1] כלומר, לכל $v, w \in A$ $< v, w >= \begin{cases} 1 & v = w \\ 0 & v \neq w \end{cases}$

נסמן

$$W_n := \text{span}\{v_1, .., v_n\}$$

<u>טענה:</u> <u>$x - x_n \perp W_n$</u> (ולכן x_n הקרוב ביותר לx ב W).
מספיק להראות ש $(x - x_n)\perp v_i$ לכל $1 \leq i \leq n$

$$< v_i, x - x_n > = < v_i, x > - < x_i, x_n > = < v_i, x > - \sum_{j=1}^{n} < v_j, x >< v_i, v_j > = < v_i, x > - < v_i, x > = 0$$

<u>טענה:</u> $\lim_{n\to\infty} x_n = x$
<u>הערה:</u> אם $n > m$ אז $||x_n - x|| \leq ||x_m - x||$. זה נכון כיוון ש $W_m \subseteq W_n$ לכן $x_n \in W_n$. אך x_n הוא הקרוב ביותר ל W_n.
בהנתן $\epsilon > 0$ קיים $u \in \text{span}\{v_1, ..v_n\}$ כך ש $||u - x|| < \epsilon$. יש n כך ש $u \in W_n$.
אך x_n הקרוב ביותר ב W_n לכן $||x_n - x|| < \epsilon$ ומההערה לעיל לכל $m \geq n$ גם כן $||x_n - x|| < \epsilon$.
סימון ל $\lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{j=1}^{\infty} < v_j, x > v_j$.
כלומר, קיבלנו

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} < v_j, x > v_j$$

■

אנליזה מודרנית- הרצאה 10

בשיעור הקודם

לקחנו מרחב הילברט H ספרבילית ו $\{x_1,..,x_n\}$ אוסף בן מנייה אורתונורמלי שה $span$ שלו צפוף, ונניח $x \in H$ אזי

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} < v_i, x > v_i$$

שפרושו

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} < v_i, x > v_i$$

נשאלת השאלה

עבור אילו סדרות $\{a_i\}$ של מרוכבים מתקיים $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ קיים, או במילים אחרות מתי הטור $\sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i$.

טענה 0.1 הטור $\sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i$ מתכנס אמ"מ הסדרה $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ היא סדרת קושי. כלומר, לכל $\epsilon > 0$ יש N כך שלכל $n, m > N$

$$|| \sum_{i=n+1}^{m} a_i v_i || < \epsilon$$

וזה יקרה אם ורק אם

$$< \sum_{i=n+1}^{m} a_i v_i, \sum_{i=n+1}^{m} a_i v_i >< \epsilon^2$$

$$\sum_{i=n+1}^{m} \overline{a_i} a_i = \sum_{i=n+1}^{m} |a_i|^2$$

קיבלנו שהטור $\sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i$ מתכנס (במרחבי הילברט מתכנס הכוונה למספר ממשי, ולא לאינסוף) אם ורק אם $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$ מתכנס.

שאלה

איזה שם נתנו לאוסף הסדרות $\{a_i\}$ של מרוכבים שעבורם $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$?

תשובה

l^2

הערה 0.2 בכל מרחב נורמי, הנורמה עצמה היא רציפה. כלומר, ההעתקה $x \mapsto ||x||$ רציפה.

הוכחה: נתונים $x, y \in V$.

$$y = x + (y - x)$$

$$||y|| \leq ||x|| + ||y - x||$$

$$||y|| - ||x|| \leq ||y - x||$$

בחילוף תפקידי x ו־y נקבל סך הכל:

$$|||y|| - ||x||| < ||y - x||$$

לכן סך הכל הנורמה מקיימת את תנאי ליפשיץ עם מקדם 1 ולכן רציפה. ■

הערה 0.3 בכל מכפלה פנימית, המכפלה הפנימית $V \times V \to \mathbb{C}$ היא העתקה רציפה.

הוכחה: ההערה שקולה לכך ש אם $x_n \to x$, $y_n \to y$ אז $< x_n, y_n > \to < x, y >$.

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle + \langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \leq$$

$$\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y_n \rangle| < ||x_n|| \cdot ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \cdot ||y|| \to 0$$

■

נחזור כעת ל"בסיס" האורתונורמלי שלנו

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i v_i$$

נרצה לחשב מהו $< x, y >$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i v_i \underset{n\to\infty}{\to} y \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \underset{n\to\infty}{\to} x$$

לכן

$$< x, y >= \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \sum_{i=1}^{n} b_i v_i \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} b_i$$

כלומר

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{a_i} b_i$$

בפרט

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$$

לכן אם $\{a_i\}$ **איננה סדרת ה0, אז** x **אינו אפס.**

לסיכום

הוכחנו שכל מרחב הילברט ספרבילי איזומורפי ל l^2.

קשר בין מידות שונות על אותה σ–אלגברה

הגדרה 0.4 נאמר ש $m\perp\mu$ אם יש A מדידה כך ש $m(A)=0$, $\mu(A^c)=0$

הגדרה 0.5 אנו נאמר ש μ נתמכת ב A אם $\mu(A^c)=0$

הגדרה 0.6 נאמר ש λ רציפה בהחלט ביחס לm ונסמן $\lambda << m$ אם λ מקיימת שאם $m(A)=0$ אז $\lambda(A)=0$

דוגמא

ניקח את $\mathbb{R}$ עם σ–אלגברת לבג.

<u>מידה א'</u>: מידת לבג m.

<u>מידה ב'</u>: מספר האיברים ב $\mathbb{Z}\cap A=$ $\mu(A)$.

נשם לב כי $m\perp\mu$

<u>מידה ג'</u>: $\lambda(A)=\int\limits_A e^x dm$.

λ רציפה בהחלט ביחס ל m.

<u>מידה ד'</u> $\nu=\mu+\lambda$, כלומר $\nu(A)=\mu(A)+\lambda(A)$

משפט רדון-ניקודים

יהי $(X,\mathcal{M})$ מרחב מדיד. יהיו λ,μ שתי מידות σ-סופיות על $\mathcal{M}$. אזי, קיימת $A\subseteq X$ מדידה עם $\mu(A^c)=0$ וקיימת $h\geq 0$ מדידה כך ששלכל $E\subseteq X$ מדידה

$$\lambda(E\cap A)=\int\limits_E hd\mu$$

הוכחה: נוכיח במקרה ש λ ו μ סופיות.

<u>למה</u>

אם $\nu\leq\lambda$[1] מדיות סופיות על $\mathcal{M}$ אז קיימת $0\leq g\leq 1$ מדידה כך שלכל E מדידה

$$\lambda(E)=\int\limits_E gd\nu$$

<u>הוכחת הלמה</u>

נביט במרחב הילברט $L^2(\nu)$ אזי לכל $f,g\in L^2(\mu)$,

$$\int|f|d\lambda\leq\int|f|d\nu=\int 1\cdot|f|\leq||1||_{2(\nu)}\cdot||f||_{2(\nu)}=\sqrt{\nu(X)}\cdot||f||_{2(\nu)}$$

לכל לכל $f,g\in L^2(\nu)$ מתקיים

$$\left|\int fd\lambda-\int gd\lambda\right|=\left|\int(f-g)d\lambda\right|\leq\int|f-g|dd\lambda\leq\sqrt{\nu(x)}\cdot||f-g||_{2(\nu)}$$

$$f\mapsto\int fd\lambda$$

הוא פונקציה רציפה (ליפשיץ עם קבוע $\sqrt{\nu(v)}$ מ $L^2(\nu)$ ל$\mathbb{R}$.

כלומר, זהו פונקציונל ליניארי רציף $L^2(\nu)\to\mathbb{R}$ לכן, ממשפט ריס על $L^2(\nu)$ קיים $g\in L^2(\nu)$ כך שלכל $f\in L^2(\nu)$ מתקיים

$$\int fd\lambda=\int fgd\nu$$

בהנתן E מדידה, ניקח $f=1_E$ ונקבל

$$\int 1_E d\lambda=\int 1_E g\nu$$

---

[1] כלומר לכל A, $\lambda(A)\leq\nu(A)$

$$\lambda(E) = \int\limits_E g d\nu$$

נותר לדאוג ש $1 \leq g \leq 0$ נראה ש $1 \leq g \leq 0$ כ.ב.מ ואז נשנה את g על קבוצה שמידתה 0.

$$\{x : g(x) > 1\} = \bigcup_n \left\{x : g(x) \geq 1 + \frac{1}{n}\right\}$$

נראה שלכל n בקבוצה הזו מידתה 0 . נניח בשלילה

$$\nu\left(\left\{x : g(x) \geq 1 + \frac{1}{n}\right\}\right) > 0$$

$$\lambda(E_n) = \int\limits_{E_n} g d\nu \geq \int\limits_{E_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) d\nu = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \nu(E_n) > \nu(E_n)$$

תרגיל

באופן דומה, $\nu\left(\{x : g(x) < 0\}\right) = 0$

<u>נחזור כעת להוכחת המשפט</u>

היו לנו λ, μ מידות סופיות על $\mathcal{M}$.

נביט במידה $\nu = \lambda + \mu$. מתקיים: $\lambda \leq \nu$, לכן קיימת $0 \leq g \leq 1$ מדידה כך שלכל E מדידה ולכל $f \in L^2(\nu)$ מתקיים

$$\int f d\lambda = \int f g d\nu = \int f g d\lambda + \int f g d\mu$$

כלומר

$$\int f(1-g) d\lambda = \int f g d\mu$$

היינו רוצים לקחת $f = 1_E \frac{1}{(1-g)}$, אבל אסור לנו כי אולי $f \notin L^2(\nu)$. אם היינו לוקחים (למרות שאסור לנו, כאלה אנחנו, חיים על הקצה) היינו מקבלים

$$\lambda(E) = \int 1_E d\lambda = \int 1_E \frac{g}{1-g} d\mu = \int\limits_E \frac{g}{1-g} d\mu$$

איך נעקוף את האיסור מדאורייתא? בעזרת התחכמות כמובן. נסמן

$$f_n = 1_E \sum_{i=0}^{n} g^i$$

כעת

$$\int 1_E(1-g^{n+1})d\lambda = \int 1_E \sum_{i=1}^{n+1} g^i d\mu$$

נסמן

$$A = \{x : 0 \le g \le 1\}$$

ולכן

$$A^c = \{x : g = 1\}$$

נראה ש $\mu(A^c) = 0$. נציב $f = 1_{A^c}$ בשוויון שלנו. נקבל

$$0 = \int 1_{A^c} d\mu = \mu(A^c)$$

נחזור לביטוי:

$$\int 1_E(1-g^{n+1})d\lambda = \int 1_E \sum_{i=1}^{n+1} g^i d\mu$$

נראה שבשני צידי השוויון קיים הגבול $n \to \infty$.

$$1 - g^{n+1} \mapsto 1_A$$

כי הסדרה נשלטת ע"י הפונקציה 1 שהיא אינטגרבילית כי λ ממידה סופית.
הגבול של צד שמאל הוא

$$\int 1_E 1_A d\lambda = \int 1_{E\cap A} d\lambda = \lambda(E \cap A)$$

בצד ימין יש לנו התכנסות מונוטונית ולכן גבול צד ימין הוא

$$\int 1_E \sum_{i=1}^{\infty} g^i d\mu$$

נסמן $h = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g^i$ ומקבל שזה שווה ל $\int\limits_E h d\mu$

<u>איך נכליל את זה גם למרחבים σ-סופיים?</u>

פרקנו את λ כך

$$\lambda(E) = \lambda_0(E) + \lambda_1(E)$$

כאשר

$$\lambda_0(E) = \lambda(E \cap A)$$

$$\lambda_1(E) = \lambda(E \cap A^c)$$

$\blacksquare$

הערה (לא קשורה למשפט)

יהי $a < t < b$ ונניח שלכל $x \in X$, $f(x) \underset{t \to a}{\to} f_t(x)$. זה שקול לאמירה שלכל סדרת נקודות t_n השואפת ל a מתקיים $f_{t_n}(x) \to g(x)$. הערה זו תאפשר לנו להכליל את משפטי ההתכנסות לגבול ממשי.

טענה 0.7 הכללת משפט ההתכנסות הנשלטת:
נניח $f(x,t)$ $a < t < b$ ו $x \in X$ המקיימת שלכל t הפונקציה $x \mapsto f(x,t)$ היא אנטגרבילית (מספיק מדידה), ויש $g \geq 0$ אנטגרבילית כך ש $|f(x,t)| \leq g(x)$ לכל t ונניח שלכל $x \in X$ קיים הגבול $\lim_{t \to a} f(x,t)$ ונסמן לכל x

$$\lim_{t \to a} f(x,t) = h(x)$$

אזי מתקיים

$$\int h(x) d\mu = \lim_{t \to a} \int f(x,t) d\mu$$

הוכחה: מספיק להראות שלכל סדרת נקודות t_n כך ש $a \mapsto t_n$ מתקיים

$$\int h(x) d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f(x,t_n) d\mu$$

וזה נכון בזכות משפט ההתכנסות הנשלטת עבור הסדרה

$$f_n(x) = f(x,t_n)$$

שכחנו לנמק מדוע h מדידה. h מדידה כגבול של מדידות, $f(x, a + \frac{1}{n})$ ■

אנליזה מודרנית- הרצאה 11

טענה 0.1 אם $f: X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ אנטגרבילית ב X לכל t קבוע וגזירה ב t לכל x קבוע, ואם יש $g(x) \geq 0$ אנטגרבילית כך ש

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$$

אזי

$$\frac{d}{dt}\left(\int f(x,t)d\mu\right) = \int \frac{\partial f}{\partial t} d\mu$$

הוכחה: בהנתן t_0 נגדיר

$$\varphi(x,h) := \frac{f(x,t_0+h) - f(x,t_0)}{h}$$

מתקיים

$$|\varphi(x,h)| \leq g(x)$$

לכן מהטענה מסוף השיעור הקודם

$$\lim_{h\to 0}\int \varphi(x,h)d\mu = \int \lim_{h\to 0}\varphi(x)d\mu$$

$$\lim_{h\to 0}\int \frac{f(x,t_0+h) - f(x,t_0)}{h}d\mu = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)d\mu$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int f(x,t_0+h)d\mu - \int f(x,t_0)d\mu\right) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)d\mu$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int f(x,t)d\mu\right) = \int \frac{\partial f}{\partial t} d\mu$$

■

טענה 0.2 יהיו ν, μ מידות על אותו מרחב מדיד $(X, \mathcal{M})$ ונניח ν סופית. אזי, $\mu \ll \nu$ אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ חש $\delta > 0$ כך שלכל E מדידה,

$$\nu(E) < \epsilon \Leftarrow \mu(E) < \delta$$

הוכחה: $(\Leftarrow)$
בהנתן $\epsilon > 0$ נניח בשלילה שאין $\delta > 0$ כזה. לכן, כל δ מהצורה $\frac{1}{2^n}$ איינו מקיים את הנדרש.
כלומר, לכל n קיימת קבוצה מדידה E_n כך ש $\mu(E_n) < \delta$ ובכל זאת $\nu(E_n) \geq \epsilon$.
נגדיר

$$F_n := \underset{k \geq n}{\cup} E_k$$

אזי

$$\mu(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$$

לכן

$$\mu\left(\underset{n}{\cap} F_n\right) = 0$$

$\underset{n}{\cap} F_n$ מקיימת $\mu(\underset{n}{\cap} F_n) = 0$ אך $\nu(\cap F_n) \geq \epsilon > 0$ בסתירה.
$(\Rightarrow)$
נניח שמתקיים התנאי על ϵ וδ, ונראה ש $\mu \ll \nu$. תהי E מדידה שעבורה $\mu(E) = 0$.
בהנתן $\epsilon > 0$ כלשהי, יש $\delta > 0$ כך שלכל F מדידה, אם $\mu(F) < \delta$ אז $\nu(F) < \delta$. E שלנו מקיימת $\delta > 0 = \mu(E)$ לכן $\nu(E) < \epsilon$. וזה היה ל $\epsilon > 0$ שרירותי. לכן, בהכרח $\nu(E) = 0$.

$\blacksquare$

מעתה ועד סוף הקורס נעסוק אך ורק בפונקציות מהממשיים לממשיים

פונקציות בעלות השתנות חסומה

תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ותהי $P = \{a = a_0 < a_1 < .. < a_m = b\}$ חלוקה של הקטע $[a,b]$. אזי, ההשתנות של f ביחס ל P תוגדר כך:

$$S_P(f) := \sum_{i=1}^{n} |f(a_i) - f(a_{i-1})|$$

נגדיר את ההשתנות של f ב $[a,b]$ כך:

$$V_{[a,b]}(f) := \sup_{\text{P division of [a,b]}} \{S_P(f)\}$$

נאמר ש f בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$ אם

$$V_{[a,b]}(f) < \infty$$

דוגמאות

אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ מונוטונית אז f בעלת השתנות חסומה.

הוכחה: נאמר ש f עולה [1] אזי לכל חלוקה $P = \{a_0, .., a_n\}$ מתקיים

$$S_P(f) = \sum_{i=1}^{n} (f(a_i) - f(a_{i-1})) = f(b) - f(a)$$

$\blacksquare$

דוגמא

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

פונקציה זו אינה בעלת השתנות חסומה.

[1] כשאומרים פונקציה עולה, הכוונה תמיד למונוטוני עולה, ולא עולה–ממש

טענה 0.3 אם $a<c<b$ אז

$$V_{[a,b]}f=V_{[a,c]}f+V_{[c.b]}f$$

טענה 0.4 נניח $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אז

$$V(f+g)\le V(f)+V(g)$$

הוכחה: בהנתן חלוקה P

$$S_P(f+g)=\sum_i|(f(a_i)+g(a_i))-(f(a_{i+1})-f(a_{i-1})|\le\sum|f(a_i)-f(a_{i-1})|+|g(a_{i+1})-g(a_i)|=$$

$$=S_p(f)+S_p(g)\le V_{[a,b]}(f)+V_{[a,b]}(g)$$

לכן גם ה sup קטן שווה. ■

למה לא שוויון?

כי נבחר $g=-f$ ונקבל השתנות 0 .

הגדרה 0.5 עבור $f:[a.b]\to\mathbb{R}$ ע"י

$$F(x):=V_{[a.x]}(f)$$

אזי, F מוגדרת ועולה, כי אם $x<y$ אז

$$F(y)=F(x)+V_{[x,y]}(f)$$

משפט 0.6 f פונקציה בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$ אם ורק אם ניתן לכתוב כהפרש של שתי פונקציות עולות על $[a,b]$

הוכחה: עבור $x<y$

$$F(y)-F(x)=V_{[x,y]}(f)\ge f(y)-f(x)$$

$$F(y)-f(y)\ge F(x)-f(x)$$

כלומר הפונקציה $F-f$ עולה. נרשום

$$f = F - (F-f)$$

לכיוון השני

אם g,h עולות על $[a,b]$ אז $g-h$ בעלת השתנות חסומה כי

$$V_{[a.b]}(g-h) \leq V_{[a,b]}(g) + V_{[a,b]}(h) < \infty$$

כי ההשתנות של פונקציות מונוטוניות היא תמיד סופית. ■

פונקציות רציפות בהחלט

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ תקרא רציפה בהחלט אם לכל $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שלכל $a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq .. \leq x_n < y_n \leq b$ המקיים

$$\sum_i (y_i - x_i) < \delta$$

$$\sum_i |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon$$

טענה 0.7 אם $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפות בהחלט (או בקיצור, ר"ב), אז גם $f + g$ ר"ב.

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$, יש $\delta > 0$ שטוב גם עבור f וגם עבור g עבור $\frac{\epsilon}{2}$.

$$\sum_i |(f(y_i) + g(y_i) - (f(x_i) + g(x_i))| \leq \sum_i |f(y_i) - f(x_i)| + \sum_i |g(y_i) - g(x_i)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

■

טענה 0.8 אם f רציפה בהחלט אז f בעלת השתנות חסומה

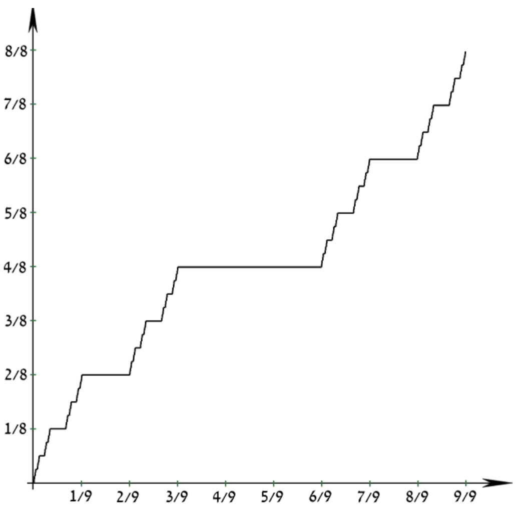
הוכחה: עבור $\epsilon = 1$ יש $\delta > 0$ כך שאם $a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq .. \leq x_n < y_n \leq b$ מקיימים $\sum\limits_i (y_i - x_i)$ אז $\sum\limits_i |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon$. לכן,

$$V_{[a,a+\delta]} f \leq \epsilon = 1$$

$$V_{[a,b]}(f) \leq \frac{b-a}{\delta} + 1$$

■

פונקצית קנטור



פונקצית קנטור היא דומה לפונקציה רציפה (כי לוקחים את הגבול, וזה יוצא "מדרגות צפופות"), והיא מונוטונית, אך לא רציפה בהחלט.

טענה 0.9 תהי $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ר"ב אז ראינו ש f בעלת השתנות חסומה. לכן, ניתר להגדיר

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}$$

ע"י

$$F(x) := V_{[a,x]}f$$

אזי F גם כן ר"ב.

הוכחה: בהנתן $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ המקיימת את תנאי הגדרת הרציפות בהחלט של f. נראה שאותו δ טוב גם עבור F. תהי

$$a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq .. \leq x_n < y_n \leq b$$

המקיימת

$$\sum (y_i - x_i) < \delta$$

נראה ש

$$\sum_i V_{[x_i,y_i]}(f) = \sum_i F(y_i) - F(x_i) < \epsilon$$

■

טענה 0.10 אם $f:[a.b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט אז יש $g,h:[a.b]\to\mathbb{R}$ רציפות בהחלט ומונטוניות כך ש $f=g-h$.

הוכחה:

$$f=F-(F-f)$$

כאשר $F,(F-f)$ מונוטוניות כמו עבור כל f בעלת השתנות חסומה. ∎

משפט 0.11 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט אם ורק אם קיימת $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית כך ש $f(x)=f(a)+\int\limits_{[a,x]}hdm$ לכל $a>0$

הוכחה: $(\Rightarrow)$

נציג $h=h^+-h^-$. מספיק להראות ש $\int\limits_{[a,x]}h^+dm$, $\int\limits_{[a,x]}h^-dm$ רציפות בהחלט.

כלומר, מספיק להוכיח עבור $h\geq 0$.

נגדיר מידה על $[a,b]$ כך: $\nu(E):=\int\limits_E hdm$, אזי אם $m(E)=0$ אז $\nu(E)=0$ כלומר $\nu\ll\mu$.

לכן בהנתן $\epsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם $m(E)<\delta$ אז $\nu(E)<\epsilon$. בפרט, לקבוצות מהצורה $(x_1,y_1)\cup(x_2,y_2)\cup..\cup(x_n,y_n)$ כאשר $x_1<y_1\leq...$

כלומר אם יש $x_1,y_1,...$ כנ"ל שעבורם

$$\sum(y_i,x_i)<\delta$$

אז

$$\sum_i\int\limits_{(x_i,y_i)}hdm<\epsilon$$

אם נסמן

$$H(x)=\int\limits_{[a,x]}hdm$$

אז קבלנו

$$\sum_i(H(y_i)-H(x_i))<\epsilon$$

קבלנו שH ר"ב.

כיוון שני

נניח $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ר"ב. נראה שקיימת $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ אנטגרבילית כך שלכל $x\in[a,b]$

$$f(x)=f(a)+\int\limits_{[a,x]} hdm$$

ראשית נוכיח עבור f ר"ב ועולה.

f עולה ולכן בעזרת משפט קרתאודורי קיימת מידה ν על $[a,b]$ כך שלכל $a\le x\le y\le b$,

$$\nu((x,y])=f(y)-f(x)$$

f ר"ב ובפרט רציפה מימין.

טענה- $\nu\ll m$

■

אנליזה מודרנית 1– הרצאה 12

ליאור פולק

25 בינואר 2016

נמשיך להוכיח את המשפט הבא: פונקציה היא רציפה בהחלט אם ורק אם היא אינטגרל של פונקציה אינטגרבילית (עד כדי קבוע שהוא $f(a)$).

משפט. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט אס"ם יש $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית כך ש– $f(x)=f(a)+\int\limits_{[a,x]} gdm$ לכל $x\in[a,b]$.

הוכחה. כבר ראינו את הכיוון $\Rightarrow$. התחלנו את ההוכחה של $\Leftarrow$. הנחנו f עולה (במובן הרחב) והבטנו במידה ν על $[a,b]$ שמקיימת $\nu((x,y])=f(y)-f(x)$ לכל $x<y$ (שקיימת לפי הבנייה של קרתאודורי).

טענה. $\nu\ll m$.

הוכחת הטענה. תהי E מדידה (לבג) כך ש–$m(E)=0$. נוכיח כי $\nu(E)=0$.

בתרגיל ראינו שלכל $\delta>0$ קיימת קבוצה פתוחה G כך ש–$E\subseteq G$ וגם $m(G\backslash E)<\delta$. לכן, $m(G)<\delta$ שכן $m(E)=0$.

עוד ראינו בתרגיל שכל קבוצה פתוחה ב–$\mathbb{R}$ ניתנת להבעה כאיחוד זר בן מנייה של קטעים פתוחים ב–$\mathbb{R}$, $I_1,I_2,\ldots$. נסמן את הקטעים כך: $I_k=(x_k,y_k)$.

כעת, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(y_i-x_i)=m(G)<\delta$.

ז"א לכל n מתקיים $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$. לכן, לפי הרציפות בהחלט של f[1], נקבל כי $\sum\limits_{i=1}^{n}(f(y_i)-f(x_i))<\epsilon$ לכל n. לכן בגבול יתקיים גם כי $\nu(E)\le\nu(G)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(f(y_i)-f(x_i))<\epsilon$. לכן $\nu(E)<\epsilon$ לכל $\epsilon>0$. מכאן $\nu(E)=0$.

נשתמש אפוא במשפט רדון ניקודים במקרה בו $\nu\ll m$.

כאמור עבור מידות סופיות באופן כללי, עבור $\lambda\ll\mu$ קיבלנו שיש A מדידה כך ש–$\mu\left(A^C\right)=0$ ויש פונקציה אינטגרבילית $h\ge 0$ כך שלכל E מדידה מתקיים $\lambda\left(E\bigcap A\right)=\int\limits_E hd\mu$.

אולם, אם $\lambda\ll\mu$ אזי $\lambda\left(E\bigcap A\right)=\lambda(E)$ [2] וקיבלנו $\lambda(E)=\int\limits_E hd\mu$.

במקרה שלנו, יש לנו $h\ge 0$ אינטגרבילית על $[a,b]$ כך ש–$\nu(E)=\int\limits_E hdm$ לכל E מדידה.

בפרט, עבור $[a,x]$. לכן $f(x)-f(a)=\nu([a,x])=\int\limits_{[a,x]} hdm$.

במקרה הכללי f רציפה בהחלט. אזי יש f_1,f_2 רציפות בהחלט ועולות כך ש–$f=f_1-f_2$. עבור f_1 יש $h_1\ge 0$ אינטגרבילית כך ש–$f_1(x)=f_1(a)+\int\limits_{[a,x]} h_1dm$, ובאופן דומה עבור f_2. נקבל:

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)=f_1(a)+\int\limits_{[a,x]} h_1dm-f_2(a)-\int\limits_{[a,x]} h_2dm=f(a)+\int\limits_{[a,x]}(h_1-h_2)\,dm$$

ואם נסמן $g=h_1-h_2$ נקבל את הדרוש.

---

[1] נשתמש ברציפות בהחלט של f: יהי $\epsilon>0$. אזי יש $\delta>0$ כך שלכל $x_1<y_1<x_2<y_2<\ldots x_n<y_n$ המקיימים $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$ אזי $\sum\limits_{i=1}^{n}(f(y_i)-f(x_i))<\epsilon$.

[2] שכן לפי הגדרת המדידות, $\lambda(E)=\lambda\left(E\bigcap A\right)+\lambda\left(E\bigcap A^C\right)$ והרי $E\bigcap A^C\subseteq A^C$ שמידתו אפס לפי μ ולכן גם לפי ν

כאן יש הסבר על ההעתקה החח"ע ועל בין $\mathbb{L}^1([a,b],m)\times\mathbb{R}$ אל $AC([a,b])$ (זהו המשפט היסודי של החדו"א, כל פונקציה הולכת לאינטגרל שלה עד כדי קבוע מ–$\mathbb{R}$). הוכחנו את העל (לרציפה בהחלט יש פונקציה אינטגרבילית שמתאנטגרלת אליה). כעת נוכיח את החח"ע. כמובן, הכל עד כדי מחלקוות שקילות כב"מ.

שתי הערות לגבי הטענה שהוכחנו בשיעור הקודם. אם $\lambda \ll \mu$ ו–λ <u>סופית</u> אזי לכל $\epsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם $\mu(E)<\delta$ אזי $\lambda(E)<\epsilon$.

1. תהי $0\le h\in\mathbb{L}^1$. נגדיר λ ע"י $\lambda(E)=\int\limits_E hd\mu$. אזי $\lambda\ll\mu$. מהמשפט הנ"ל נקבל שלכל $\epsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם $\mu(E)<\delta$ אזי $\int\limits_E hd\mu<\epsilon$.
2. ההנחה כי λ סופית נחוצה. נראה זאת ע"י כך שהתנאי בהערה 1 ש–h אינטגרבילית הוא נחוץ.

דוגמה. על $(0,1)$ עם מידת לבג ניקח את הפונקציה $h(x)=\frac{1}{x}$. והרי לכל $\delta>0$ שניקח יתקיים $\int\limits_{(0,\delta)}\frac{1}{x}dm>\epsilon$.

משפט. תהי h אינטגרבילית על $[a,b]$. נגדיר $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\int\limits_{[a,x]} hdm$. אזי f גזירה כ.ב.מ. ומתקיים $f'=h$ כ.ב.מ.[3]

למה. יהי $\{I_\alpha\}$ אוסף של קטעים פתוחים. נסמן $G=\bigcup\limits_\alpha I_\alpha$. נניח G חסומה. אזי יש תת אוסף <u>סופי</u> $I_{\alpha_1},\dots I_{\alpha_n}$ כך ש–

1. I_{α_i} זרים בזוגות;
2. $\sum\limits_{i=1}^n m(I_{\alpha_i})\ge\frac{1}{4}m(G)$.

הוכחת הלמה. קיימת $K\subseteq G$ סגורה כך ש–$m(K)\ge\frac{3}{4}m(G)$. K סגורה וחסומה ולכן קומפקטית. כעת $\{I_\alpha\}$ כיסוי פתוח ל–K, ולכן יש לו תת–כיסוי סופי $I_{\alpha_1},\dots I_{\alpha_l}$. כיוון ש–$K\subseteq\bigcup\limits_{1\le i\le l}I_{\alpha_i}$. כמו כן מתקיים כי $\sum\limits_{i=1}^l m(I_{\alpha_i})\ge m(K)\ge\frac{3}{4}m(G)$.

נבצע "דילול" ל–$I_{\alpha_1},\dots I_{\alpha_l}$ באופן הבא:

נסדר אותם בסדר יורד של המידה, כלומר:

$$m(I_{\alpha_1})\ge m(I_{\alpha_2})\dots$$

ניקח את I_{α_1}. אם I_{α_2} חותך את I_{α_1} אזי נזרוק אותו. כן הלאה נמשיך.

נתקדם באינדקסים– אם I_{α_i} חותך את איחוד הקודמים שלא זרקנו, נזרוק אותו. אם הוא זר לאיחוד הקודמים שלא זרקנו, נשמור אותו.

אם I_{α_j} נזרק פירושו של דבר ש–I_{α_j} חותך את I_{α_i} עבור איזשהו $i<j$ שלא נזרק. מתקיים $m(I_{\alpha_i})\ge m\left(I_{\alpha_j}\right)$ ולכן המתיחה פי שלושה של I_{α_i}מכילה את I_{α_j}.

לכן איחוד המתיחות של הקטעים ששמרנו מכיל את איחוד הקטעים שמכיל את K. נרשום:

$$\frac{3}{4}m(G)\le m(K)\le m(\text{Union of stretchings of the segments we saved})\le\sum_{\text{Segments we saved}}3m(I_{\alpha_s})$$

ולכן $\sum\limits_{\text{Segments we saved}}3m(I_{\alpha_s})\ge\frac{1}{4}m(G)$.

נחזור להוכחת המשפט. נניח $h\ge 0$. נסמן $A=\left\{x\in[a,b]\,\middle|\,h(x)=0\right\}$. נראה שכ.ב.מ. ב–$A$ מתקיים $f'=0$ (כלומר, קיימת ושווה 0). כלומר, יש B שמידתה 0 כך שלכל $x\in A\backslash B$ מתקיים $f'(x)=0$.

נסמן $t\downarrow 0$ כגבול של $t\to 0$ מהחיוביים $(t\ge 0)$.

צ"ל $\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\overset{t\downarrow 0}{\to}0$ בתחום הנ"ל וגם $\frac{f(x-t)-f(x)}{-t}\overset{t\downarrow 0}{\to}0$.

כלומר $\frac{f(x)-f(x-t)}{t}\overset{t\downarrow 0}{\to}0$ כלומר $\frac{\int_{[x-t,x]}hdm}{t}\overset{t\downarrow 0}{\to}0$ וכן בתחום כנ"ל.

[3] משפט זה נותן לנו הוכחה פשוטה לכך שפונקציית קנטור אינה רציפה בהחלט.

אולם,

$$\int_{[x-t,x+t]} hdm \geq \int_{[x,x+t]} hdm \ \wedge \ \int_{[x-t,x+t]} hdm \geq \int_{[x-t,x]} hdm$$

ולכן מספיק להראות כי

$$\frac{\int_{[x-t,x+t]} hdm}{t} \xrightarrow{t\downarrow 0} 0$$

בתחום כנ"ל. נסמן:

$$T(x,t) \equiv \frac{\int_{[x-t,x+t]} hdm}{t}$$

ולכן צ"ל

$$T(x,t) \xrightarrow{t\downarrow 0} 0$$

בתחום כנ"ל.

אבל $T(x,t) \geq 0$ ולכן $\lim_{t\downarrow 0} T(x,t) = 0$ אם"ם $\limsup_{t\downarrow 0} T(x,t) = 0$. נגדיר:

$$P_j \equiv \left\{ x \in A \middle| \limsup_{t\downarrow 0} T(x,t) \geq \frac{1}{j} \right\}$$

אם נראה לכל j ש־$m(P_j) = 0$ אזי ניקח $B = \bigcup_j P_j$ והטענה תוכח.

ראינו היום שכיוון ש־$h \geq 0$ אינטגרבילית, אזי בהינתן $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שאם $m(E) < \delta$ אזי $\int_E hdm < \epsilon$. ניקח $A \subseteq G$ פתוחה כך ש־$m(G \backslash A) < \delta$. לכן, $\int_{G\backslash A} hdm < \epsilon$ ומכאן

$$\int_G hdm = \int_A hdm + \int_{G\backslash A} hdm < 0 + \epsilon = \epsilon$$

לכל $x \in P_j$ קיים $t_x > 0$ קטן כרצוננו כך ש־$T(x,t) > \frac{1}{j}$. נבחר t_x קטן מספיק כך ש־$(x - t_x, x + t_x) \subseteq G$.

כלומר, $\frac{\int_{[x-t_x,x+t_x]} hdm}{t_x} > \frac{1}{j}$, כלומר $\int_{[x-t_x,x+t_x]} hdm > t_x$ j. נסמן $U_\epsilon = \bigcup_{x\in P_j} (x - t_x, x + t_x)$.

מתקיים כי $P_j \subseteq U_\epsilon$. מהלמה, יש $x_1, \ldots, x_n \in P_j$ כך ש:

1. $(x_i - t_{x_i}, x_i + t_{x_i})$ זרות בזוגות;
2. $\sum m(\ldots) = \sum 2t_{x_i} \geq \frac{1}{4} m(U_\epsilon)$.

כעת,

$$m(U_\epsilon) \leq 8 \sum_{i=1}^n t_{x_i} \leq 8j \sum_{i=1}^n \int_{[x-t_x,x+t_x]} hdm \leq 8j \sum_{i=1}^n \int_G hdm \leq 8j\epsilon$$

נסמן $V = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} U_{\frac{1}{l}}$. V מדידה. לכל l, $V \subseteq U_{\frac{1}{l}}$, ולכן $m(V) \leq m\left(U_{\frac{1}{l}}\right) \leq \frac{8j}{l}$. זה לכל l, ולכן $m(V) = 0$. מכאן, $P_j \subseteq V$ ולכן P_j מדידה, ומידתה 0.

אנליזה מודרנית 1– הרצאה 13

ליאור פולק

1 בפברואר 2016

נמשיך להוכיח את המשפט הבא:

משפט. $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית. נגדיר $f(x)=\int\limits_{[a,x]} hdm$. אזי f גזירה כב"מ ומתקיים כב"מ כי $f'(x)=h(x)$.

הוכחנו כבר עבור מקרה פרטי: $h\geq 0$, עבור ה–x בהם $h(x)=0$.

הרחבות בשלבים:

אם $h\leq 0$ זה גם נכון עבור ה–x בהם $h(x)=0$ (נסתכל על $-h$).

נניח $h\geq r$, r קבוע. אפשר לכתוב $h=r+(h-r)$, ואז $r\geq 0$ וגם $h-r\geq 0$, ואם $A=\left\{x\middle|h(x)=r\right\}$ אזי כב"מ ב–A מתקיים $f'(x)=h(x)$.

עבור $h\leq r$ זהו אותו הדבר.

כעת עבור h כללית, לכל $r\in\mathbb{Q}$ נגדיר $h_r^+=\max\{h,r\}$, $h_r^-=\min\{h,r\}$.

מתקיים ש–$h_r^+\geq r$ ולכן יש קבוצה ממידה 0, B_r, המקיימת שלכל $x\notin B_r$ ו–$h(x)=r$ אזי $\left(\int\limits_{[a,x]} h_r^+dm\right)'$ קיימת ב–x ושווה r.

באותו אופן, לכל r יש C_r עבור h_r^-.

נסמן $D=\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} B_r\bigcup\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} C_r$. כעת $m(D)=0$.

בהנתן $x\notin D$ נראה שהנגזרת של $f(x)$ קיימת ב–x ושווה $h(x)$.

לכל $r_1<h(x)<r_2$ כאשר $r_{1,2}\in\mathbb{Q}$ נראה כי

$$\limsup_{t\searrow 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\leq r_2\ ,\ \limsup_{t\searrow 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=\leq r_2$$

(ובאותו האופן גם הגבול משמאל). מכאן יתקבל הנדרש.

אבל:

$$\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=\frac{\int\limits_{[x,x+t]} hdm}{t}\leq\frac{\int\limits_{[x,x+t]} h_{r_2}^+dm}{t}\underbrace{=}_{h_{r_2}^+=\max\{h,r_2\}}\underbrace{=}_{h<r_2\text{ here}}{}_{r_2,x\notin D,B_{r_2}}\overset{t\searrow 0}{\to} r_2$$

ולכן $\limsup\limits_{t\searrow 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\leq r_2$.

לסיכום תקופה נפלאה: יש לנו $L^1=L^1([a,b],m)$, $AC=AC([a,b])$ כל הפונקציות הר"ב[1] על $[a,b]$.

$$L^1\times\mathbb{R}\quad\overset{(h,c)\mapsto c+\int\limits_{[a,x]} hdm}{\longrightarrow}\quad AC$$

$$L^1\times\mathbb{R}\overset{\left(f',f(a)\right)\leftarrow f}{\longleftarrow}AC$$

[1] רציפות בהחלט

1 קבוצות מדידות (ושאינן מדידות) לבג (ובורל)

על $[0,1]$ הגדרנו יחס שקילות $a\sim b$ אם $a-b\in\mathbb{Q}$. מכל מחלקת שקילות בחרנו נקודה אחת ולאוסף זה קראנו A. ראינו שלכל $r\neq s\in\mathbb{Q}$ מתקיים ש־$r+A$ ו־$s+A$ זרות. ראינו גם כי

$$[0,1]\subseteq\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\bigcap[-1,1]}r+A\subseteq[-1,2]$$

אם A הייתה מדידה, כל הזזה שלה מדידה. אם מידתה אפס אזי קבוצה שמידתה אפס לא יכולה להכיל קבוצה ממידה אחת. אחרת מידתה חיובית, ואז מידת האיחוד אינסופית, ואז היא מוכלת בקבוצה ממידה שלוש. לכן בהכרח A איננה מדידה.

טענה. אם $K\subseteq A$ מדידה אזי בהכרח $m(K)=0$.

הוכחת הטענה. אחרת נקבל את אותה הסתירה עם $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\bigcap[-1,1]}r+K\subseteq[-1,2]$.

משפט. (ויטלי Vitali) לכל קבוצה מדידה לבג $E\subseteq\mathbb{R}$ כך ש־$m(E)>0$ יש $K\subseteq E$ שאיננה מדידה.

הוכחה. נציג $E=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}E\bigcap[n,n+1]$. לכן קיים n כך ש־$m\left(E\bigcap[n,n+1]\right)>0$. לכן ע"י הזזה נניח בה"כ ש־$E\subseteq[0,1]$. אבל אז $E\subseteq[0,1]\subseteq\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\bigcap[-1,1]}r+A$ ולכן $E=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\bigcap[-1,1]}E\bigcap(r+A)$.

טענה. אחת מן הקבוצות $E\bigcap(r+A)$ (עבור איזשהו $r\in\mathbb{Q}\bigcap[-1,1]$) איננה מדידה <u>לבג</u>.

הוכחת הטענה. נניח בשלילה שכולן מדידות <u>לבג</u>. אבל $E\bigcap(r+A)\subseteq r+A$ לכן אם הן מדידות מידתן 0 (הראינו על A, אך זה נובע גם להזזות של A). קיבלנו כי E איחוד בן מניה של קבוצות שמידתן 0. לכן E מידתה 0. סתירה.

הערה. עצמת σ–אלגברת לבג היא $2^{\aleph}$.

הוכחה. $|C|=\aleph$, C היא קבוצת קנטור.[2] כל תת–קבוצה של C מדידה לבג ולכן כבר כאן יש לנו $2^{\aleph}$ קבוצות מדידות לבג. מצד שני σ–אלגברת לבג מוכלת בקבוצת החזקה של $\mathbb{R}$ שגודלה $2^{\aleph}$. לכן עצמת σ–אלגברת לבג היא $2^{\aleph}$.

לכן אנחנו מסתכלים תמיד על $f:X\to\mathbb{R}$ כאשר $\mathbb{R}$ עם σ–אלגברת בורל כי התנאי שתמונה הפוכה של קבוצת לבג היא מדידה, אבל זה כבר תנאי חזק מדי– ראינו שיש אפילו פונקציות רציפות שלא מקיימות תנאי זה!

משפט. יש קבוצות מדידות לבג שאינן מדידות בורל.

הוכחה. קבוצת קנטור ופונקציית קנטור. אפשר להרחיב דעת בקישור הבא:

http://www.math3ma.com/mathema/2015/8/9/lebesgue-but-not-borel

[2] הידעת? אם קנטור היה מעברת את שמו, היה שמו בישראל חזן

[3] תם ולא נשלם
נחתם עוד אנליזה בעולם
אני אמצא לי $d\mu$ קטן
אני אמצא אינטגרציה קטנה במידה שבחיי
לו רק יכולתי
אז אולי לשים את כל הטורים המתכנסים,
את כל הדלתות, השקרים באינטגרל

תם ולא נשלם
תמיד אתכנס למשהו כב"מ
המחפש כמו כולם
להיות אינטגרבילי בעולם
הלא רציף והקורע,
זה שגוזר אינטגרציה לבצע,
הפוקנציה העקומה כמו קבוצה בת מנייה...

אז אני בורח ומודד שוב אלייך
וכל למה היא כמו ניצוץ בעינייך
אני לומד ויודע–
אין מועד אחר.
וכמו אחד שמנסה,
לעבור במועד א את הקורס הזה...
במועד א את הקורס הזה...

אני כותב, אני צורח
מה הנימוק? מי הרוצח?
מי שירה בגלואה?
מה קשור פה גלואה?
מי הלומד? מי החורש?
מי שמקשיב בפי חמש,
היכן האינטגרציה מתחילה?
בין קטע סגור או קבוצה מדידה?

אז אני בורח ומודד שוב אלייך...