שאלה 1 - גזירה איבר איבר בטורי פונקציות

חשב את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$

פתרון

נבדוק מהו סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x^k}$ עבור $1<x$:

נשים לב כי: $\left(\frac{1}{x^k}\right)' = -\frac{k}{x^{k+1}} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{k}{x^k}$ (נתעלם כרגע מה-k ובסוף נשלים אותו)

כמו כן, מתקיים:

$$\forall x>1: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^k \underset{\text{סכום}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{x-1}$$

סדרה הנדסית אינסופית $\frac{a_1}{1-q}$ עבור $|q|<1$

קיבלנו שפונק' הסכום מוגדרת, כלומר הטור ההנדסי מתכנס נקודתית לכל $1<x$. (תנאי ראשון של שימוש במשפט גזירה איבר איבר).

נבדוק את טור הנגזרות: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-k}{x^{k+1}}$

מתקיים:

$$\forall x>1, \exists c: 1<c<x \,|$$

$$\left|\frac{-k}{x^{k+1}}\right| \leq \left|\frac{k}{c^{k+1}}\right|$$

ולכן עפ"י מבחן ה-M טור הנגזרות מתכנס במ"ש בקטע $[a,b]$ עבור $1<a$. (תנאי שני של שימוש במשפט גזירה איבר איבר).

←

מתוך משפט הגזירה איבר איבר מתקיים:

$$\forall x>1:\quad \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^k}\right)' \underset{\substack{\downarrow\\\text{החלפת}\\\text{סדר הסכום}\\\text{עם הגזירה}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x^k}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-k}{x^{k+1}} = \boxed{-\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{x^k}}$$

ומצד שני ידוע ש:

קודם חישוב סכום ואז נגזרת

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^k}\right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^k\right)' \underset{\substack{\downarrow\\\text{סכום}\\\text{סדרה הנדסית}\\\text{אינסופית מתכנסת כאשר } |q|<1}}{=} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)' = \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x-1}\right)'$$

נגזור ונקבל:

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)' = \boxed{\frac{-1}{(x-1)^2}}$$

שני הביטויים המסומנים שווים.

כלומר:

$$-\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{x^k} = \frac{-1}{(x-1)^2} \qquad (*)$$

במקרה שלנו, נדרשנו לחשב את הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}$

ולכן, בשביל לקבל בצד שמאל (*) את הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{x^k}$ ואז להציב $x=3$

נכפיל את שני האגפים ב: $(-x)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k} = \cancel{(-x)}\left(-\frac{\cancel{1}}{x}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{x^k}\right)\Bigg]_{\substack{\text{עבור}\\x=3}} = (-x)\cdot\frac{-1}{(x-1)^2}$$

סה"כ נקבל:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k} = -3\cdot\frac{-1}{(3-1)^2} = \frac{-3\cdot(-1)}{2^2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

שאלה 2 – טור חזקות

נתון טור החזקות $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{2^{2n}\cdot \ln(n)}$

חשב את רדיוס ההתכנסות ומצא את תחום ההתכנסות של הטור.

פתרון

נכתוב את הטור בצורה $\sum a_n \cdot x^n$. נקבל: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^{2n}\cdot \ln(n)}\cdot x^n$

נמצא את רדיוס ההתכנסות לפי מבחן המנה:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{(-2)^n}{2^{2n}\cdot \ln(n)} \cdot \frac{2^{2(n+1)}\cdot \ln(n+1)}{(-2)^{n+1}}\right|$$

$$= \left|\frac{\cancel{(-2)^n}\cdot \cancel{2^{2n}}\cdot 2^2 \cdot \ln(n+1)}{\cancel{2^{2n}}\cdot \ln(n)\cdot \cancel{(-2)^n}\cdot (-2)}\right| = \left|-2\cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right| = |-2|\cdot\left|\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right| \xrightarrow[\text{לופיטל}]{n\to\infty}$$

$$|-2|\cdot\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = |-2|\cdot\left|\frac{n}{n+1}\right| \xrightarrow{n\to\infty} \boxed{2}$$

$$R=2$$

עבור $|x|<2$ הטור מתכנס בהחלט. עבור $2<|x|$ הטור מתבדר.

נותר לבדוק בקצוות:

עבור $x=-2$ נקבל:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n\cdot(-2)^n}{2^{2n}\cdot \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cancel{4^n}}{\cancel{4^n}\cdot \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)}$$

הטור מתבדר שהרי $\ln(n)<n \Leftarrow \frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}$. (והטור $\sum\frac{1}{n}$ טור ההרמוני המתבדר.)

ולכן עבור $x=-2$ הטור מתבדר.

$\longleftarrow$

<u>עבור $X=2$</u> נקבל:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n \cdot 2^n}{2^{2n} \cdot \ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-4)^n}{4^n \cdot \ln(n)}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

על פי מבחן לייבניץ $\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot (-1)^n\right)$

הטור <u>מתכנס בתנאי</u> מאחר ומתקיימים

תנאי לייבניץ:

1. הטור עם סימנים מתחלפים
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$
3. a_n סדרה יורדת, מתקיים: $a_n > a_{n+1} \Leftarrow \frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{\ln(n+1)}$

$\ln(n) < \ln(n+1)$ ולכן:

אין הטור אינו מתכנס בהחלט מכיון ש:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} \Rightarrow \text{הטור מתבדר}$$

<u>לסיכום:</u>

עבור $-2 < X < 2$ הטור מתכנס בהחלט

עבור $X = 2$ הטור מתכנס בתנאי

עבור $X > 2$ $X \le -2$ הטור מתבדר

תרגילים

1. מצא את סכומו של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

פתרון : נרשום את הסכום ה- n של הטור $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. כל המחובר ב- S_n נרשום בצורה הזו :

$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\dots\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. נקבל

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

2. קבע האם הטור הנתון מתכנס או מתבדר . אם הטור מתכנס, מצא את סכומו .

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n-1}}$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{5^{n-1}}$

[redacted]

פתרון :

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n\cdot\frac{1}{2}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ הטור הגיאומטרי מתבדר כי $q=\frac{3}{2}>1$.

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{5^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1+3}}{5^{n-1}}=8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}=8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ הטור הגיאומטרי מתכנס כי $q=\frac{2}{5}<1$.

$S_n=\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$, $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)=\frac{5}{3}$,לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{5^{n-1}}=\frac{40}{3}$

3. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^3+1}$ מתכנס או מתבדר .

פתרון : נחשב את הגבול של האיבר הכללי $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+1}=1$. התנאי ההכרחי להתכנסות לא מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$,לכן הטור מתבדר .

4. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+2)}$ מתכנס או מתבדר .

פתרון : נשתמש במבחן ההשוואה .

$\frac{n+3}{n(n+2)}=\frac{1}{n}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)>\frac{1}{n}$. הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר ,לכן הנתון גם מתבדר .