כמו שמדברים על אינטגרלים כפולים, אפשר לדבר גם על אינטגרלים משולשים וכו'. במקום לדבר על שטח נדבר על תכולה(נפח)

הגדרה

תחום נורמלי מטיפוס x ב$\mathbb{R}^3$:

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|\begin{array}{c}\varphi(x,y)\le z\le\psi(x,y)\\(x,y)\in\bar{D}\end{array}\right\}$$

דוגמה

הכדור $x^2+y^2+z^2=R^2$ הוא תחום נורמלי מטיפוס x(וגם משאר הטיפוסים):

$$-\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\le z\le\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}$$

אם f רציפה בתחום V כנ"ל, וφ,ψ רציפות ב$\bar{D}$, אזי

$$\iiint\limits_V f\,\mathrm{d}V=\iint\limits_D\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}S$$

ואם גם $\bar{D}$ נורמלי מטיפוס x

$$\bar{D}=\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{c}\alpha(x)\le y\le\beta(x)\\a\le x\le b\end{array}\right\}=\int_a^b\left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

דוגמה

תיבה

$$V=\prod_{i=1}^{3}[a_i,b_i]$$

$$f:V^{\subset\mathbb{R}^3}\to\mathbb{R}$$

$$V=\left\{(x,y,z)\middle|\begin{array}{c}a_3\le z\le b_3\\(x,y)\in\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{c}a_1\le x\le b_1\\a_2\le y\le b_2\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$f\in C(V)$$

$$\iiint\limits_V f\,\mathrm{d}v=\iint\limits_{\bar{D}}\left(\int_{a_3}^{b_3}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)=\int_{a_1}^{b_1}\left[\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

דוגמה

תהי $f\left(x_{1},...x_{k}\right)=\prod_{i=1}^{k}g_{i}\left(x_{i}\right)$.

הוכח שאם g_{i} רציפות בקטעים $[a_{i},b_{i}]$ ($i=1,...k$) אזי

$$\int\cdots\int f\,\mathrm{d}V=\prod_{i=1}^{k}\int_{a_{i}}^{b_{i}}g\left(x_{i}\right)\,\mathrm{d}x_{i}$$

$$V\doteqdot\prod_{i=1}^{k}\left[a_{i},b_{i}\right]$$

הוכחה

$$\iiint\limits_{V}f\,\mathrm{d}V=\int_{a_{k}}^{b_{k}}\left[\int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}}\left[\int\cdots\left(\int_{a_{1}}^{b_{1}}\prod_{i=1}^{k}g\left(x_{i}\right)\,\mathrm{d}x_{1}\right)\,\mathrm{d}x_{2}\right]\cdots\right]\,\mathrm{d}x_{k}$$

וגומרים באינדוקציה על מספר הגורמים.

העתקות

יהיו $\bar{D},\bar{D}'$ תחומים סגורים חסומים בעלי תכולה ב$\mathbb{R}^{k}$.

תהי $x\left(\cdot\right):\bar{D}'\to\bar{D}$ פונקציה ממח' C^{1}, חד חד ערכית ועל.

(לכן קיימת ההעתקה ההפוכה $\begin{array}{c}x\to u\left(x\right)\\ \bar{D}\to\bar{D}'\end{array}$, גם היא בהכרח ממח' C^{1})

בהכרח היעקוביאן J של ההעתקה $u\to x\left(u\right)$ <u>שונה מ0</u> ב$\bar{D}'$

תהי f רציפה ב$\bar{D}$

$$\int\cdots\int\limits_{\bar{D}}f\left(x\right)\,\mathrm{d}x=\int\cdots\int\limits_{\bar{D}}f\left(x\left(u\right)\right)\left|J\left(u\right)\,\mathrm{d}u\right|$$

דוגמאות

(1) ב$\mathbb{R}^{2}$

העתקה מקואורדינטות פולריות לקואורדינטות קרטזיות.

$$\left(x,y\right)=\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)$$

$$\left(u=\right)\left(r,\theta\right)\in\left[0,\infty\right)\times\left[0,2\pi\right]\to\mathbb{R}^{2}$$

(הערה: אמנם הצגה פולרית אינה חח"ע כאשר $\theta \in [0, 2\pi]$ - אבל רק בנקודה אחת, ולכן זה לא מפריע לאינטגרל)

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r$$

f רציפה בעיגול $\bar{D} = \left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \le R^2\right\}$

$$\iint\limits_{\bar{D}} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_{\bar{D}'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$

$$\bar{D}' = [0, R] \times [0, 2\pi]$$

למשל

$f \equiv 1$. שטח העיגול הוא

$$S\left(\bar{D}\right) = \iint r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \left(\int_0^R r \, \mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\theta\right) = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2$$

למשל

$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ ($\bar{D}$ כנ"ל)

$$\iint\limits_{\bar{D}} e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint e^{-r^2} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \left(\int_0^R e^{-r^2} r \, \mathrm{d}r\right) \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{R^2} e^{-u} \, \mathrm{d}u = \left. \frac{1}{2} e^{-u} \right|_{R^2}^{0} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-R^2}\right)$$

$$\boxed{\iint\limits_{\bar{D}} e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \prod\left[1 - e^{-R^2}\right]}$$

ב$\mathbb{R}^3$

העתקה מקואורדינטות כדוריות לקואורדינטות קרטזיות

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$(r,\varphi,\theta)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]\to(x,y,z)$$

$$\boxed{J\left(r,\varphi,\theta\right)=r^2\sin\theta}$$

$$\iiint\limits_{\bar{D}} f\left(x,y,z\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\bar{D}'} f\left(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\theta,r\cos\theta\right)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

למשל

אם $\bar{D}$ הוא כדור שמרכזו 0 ורדיוסו R,

$$\bar{D}=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2\right\}$$

$$\bar{D}'=\left\{(r,\varphi,\theta)\middle|\begin{array}{c}0\le r\le R\\0\le\varphi\le2\pi\\0\le\theta\le\pi\end{array}\right\}=[0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

קיבלנו תיבה.

למשל

עבור $f\equiv1$. הנפח של הכדור $\bar{D}$ הוא

$$V\left(\bar{D}\right)=\iiint\limits_{\bar{D}} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\bar{D}'} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^R r^2\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)=\frac{4\pi}{3}R^3$$

העתקה מקואורדינטות גליליות לקואורדינטות קרטזיות

$$\begin{cases}x=r\cos\varphi\\y=r\sin\varphi\\z=z\end{cases}$$

$$(r,\varphi,z)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}\to(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

$$J\left(r,\varphi,z\right)=\begin{vmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0\\-r\sin\varphi&r\cos\varphi&0\\0&0&1\end{vmatrix}=r$$

כדור בקואורדינאות גליליות

$$-\sqrt{R^2-r^2} \le z \le \sqrt{R^2-r^2}$$

$$\begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -\sqrt{R^2-r^2} \le z \le \sqrt{R^2-r^2} \end{cases}$$

$$V\left(\bar{D}\right) = \iiint\limits_{\bar{D}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\bar{D}'} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} \left(\int_{\sqrt{R^2-r}}^{\sqrt{R^2-r}} \mathrm{d}z\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R 2\sqrt{R^2-r^2}r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^{R^2} w^{1/2}\,\mathrm{d}w = 2\pi\frac{2}{3}w^{3/2}\bigg|_0^{R^2} = \frac{4\pi}{3}R^3$$