תרגול 10

(Ω,Σ,μ) ממ"ח.

1) תהיינה $f_1,\dots,f_n$ פונקציות מדידות Σ-

א) יהיו $0<a_1,\dots,a_n<\infty$

$$\sum_{1}^{n} a_i = 1$$

הוכח

$$\int_\Omega \left|\prod_{i=1}^{n} f_i^{a_i}\right| d\mu \leq \prod \left(\|f_i\|_{L^1}\right)^{a_i}$$

רמז: אינדוקציה + אי שוויון הלדר.

ב) הסימונים של סעיף א', רק אפשרו לערך של a_i-ים שווים ל-0. יהיו: $p_i := a_i^{-1}$ (עם המוסכמה: $0^{-1}=\infty$)

הוכח

$$\int_\Omega \left|\prod_{1}^{n} f_i\right| d\mu \leq \prod_{1}^{n} \|f_i\|_{p_i}$$

(כוונת של מקף גם בסעיף זה..)

ג) יהיו

$$0<p_1,\dots,p_n,r$$

$$\sum_{1}^{n} p_i^{-1} = r^{-1}$$

הוכח

$$\left\|\prod_{1}^{n} f_i\right\|_r \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}$$

(חלקו למקרים 1) $r^{-1}>0$ 2) $r^{-1}=0$)

2) תהי $f:\Omega\to\mathbb{R}$ מדידה-Σ

נגדיר:

$$E_f := \{0<p<\infty \mid \|f\|_p<\infty\}$$

הוכיחו:

א) אם $r<s$ ושניהם ב: E_f

אז לכל p: $r<p<s \Rightarrow p\in E_f$

ב) אם $0<r<p<s<\infty$

אז קיים $t\in(0,1)$ יחיד כך ש

$$p = tr + (1-t)s$$

עבור t זה:

$$\|f\|_p \le \|f\|_r^{t\left(\frac{r}{p}\right)} \cdot \|f\|_s^{(1-t)\left(\frac{s}{p}\right)} \le \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}$$

3) נסמן ב μ_1 את מידת לבג המנורמלת

על מעגל היחידה S^1, כלומר: $\frac{m}{2\pi}(S^1) = \mu_1(S^1) = 1$

יהיו: $A, B \subseteq S^1 = \{x \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^2$

המקיימות: $\mu_1(A) = \mu_1(B) = \frac{1}{2}$

עבור העתקת סיבוב בזווית θ: U_θ,

נגדיר: $A_\theta := U_\theta A$

הראו שקיים $\theta \in [0, 2\pi]$ כך ש: $\mu_1(A_\theta \cap B) \geq \frac{1}{4}$

הדרכה: הגדירו פונקציה: $f(\theta) = \mu_1(A_\theta \cap B)$

והשתמשו במשפט פוביני כדי לחשב את

האינטגרל שלה.. (כיון שהמידה אחידה ומנורמלת הערך

של האינטגרל מהווה את הממוצע של הטווח של f..)

מכאן הסיקו...