תרגיל בית 11 מדעי המחשב טורי טיילור-פתרון

שאלה 1 פתרון:

א. נציג שתי דרכים למציאת הטור המבוקש. דרך ראשונה- $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=1-2\sin^2(x)$. לכן, $f(x)=\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}$.

כעת, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ולכן

$$\sin^2(x)=\frac{1}{2}-\frac{\cos(2x)}{2}=\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}2^{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}2^{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

כדי לחשב את $f^{(8)}(0)$ נמצא תחילה את המקדם של x^8 שמתקבל מהצבה $n=3$ (כי אז $2n+2=8$). המקדם הוא $\frac{(-1)^3 2^7}{8!}$. מצד שני המקדם אמור להיות $\frac{f^{(8)}(0)}{8!}$. מיחידות הפיתוח לטור חזקות נקבל ש $\frac{f^{(8)}(0)}{8!}=\frac{(-1)^3 2^7}{8!}$. לכן, $f^{(8)}(0)=-2^7$. קל לראות ש $f^{(9)}(0)=0$ (למה?).

ב. נשים לב ש $\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$. כמו כן כאשר $|x|<1$ מתקיים $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. לכן ממשפט גזירה איבר איבר נקבל שלכל $|x|<1$ מתקיים $\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}$. כדי "להגיע" ל$x^8$ צריך להציב

$n=9$ נקבל שהמקדם של x^8 הוא 9 מצד אחד ו $\frac{f^{(8)}(0)}{8!}$ מצד שני. לכן,

$\frac{f^{(8)}(0)}{8!}=9$. כלומר, $f^{(8)}(0)=9!$ ובאופן דומה מראים ש $f^{(9)}(0)=10!$.

<u>שאלה 2:</u>

חשבו את $\cos 0.1$ עם שגיאה שלא תעלה על 0.001 **הוכחה: (פתרון):** נזכר בפיתוח מקלורן של $\cos x$ (מסדר $2n$):

$$\cos x \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x)$$

באשר

$$R_{2n}(x) \quad = \quad \frac{\cos^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$$

באשר c נקודה בין 0 ל-x. ברצוננו לדאוג לכך ש

$$\left| \cos 0.1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 0.1^{2k}}{(2k)!} \right| \quad = \quad |R_{2n}(0.1)| < 0.001$$

כלומר

$$\begin{aligned} |R_{2n}(0.1)| \quad &= \quad \left| \frac{\cos^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} \cdot 0.1^{2n+1} \right| \\ &\leq \quad 0.001 \end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\left| \frac{\cos^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} \cdot 0.1^{2n+1} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} \sin(c)}{(2n+1)!} \cdot 0.1^{2n+1} \right| \quad \leq \quad \frac{1}{1} \cdot 0.1^{2n+1}$$

ולכן די לדרוש

$$0.1^{2n+1} \quad < \quad 0.001 = 0.1^3$$

כלומר $2n+1 > 3$, כלומר $n > 1$. מכאן עבור $n = 2$ נקבל דיוק כדרוש:

$$\cos 0.1 \quad \approx \quad 0.1 - \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.1^4}{4!} \approx 0.0950$$

<u>שאלה 3:</u>

בעזרת פיתוח מקלורן של e^x חשבו את $e^{-\frac{1}{3}}$ בדיוק של 0.001. **הוכחה:** נזכר בפיתוח מקלורן של e^x:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

כאשר $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$ ו-c בין 0 ל-x. לכן

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

ולכן

$$\left| e^{-\frac{1}{3}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^k}{k!} \right| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{3^{n+1}}$$

ולכן די למצוא מתי

$$\frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{3^{n+1}} \leq 0.001 = 10^{-3}$$

כלומר עבור איזה n מתקיים

$$10^3 \leq 3^{n+1}(n+1)!$$

מתקיים $3^4 \cdot 4! = 1944 > 1000$ לכן מספיק לקחת פיתוח מקלורן מסדר 3:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{3}} &\approx \sum_{k=0}^{3} \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^k}{k!} \\ &= 1 - \frac{1}{3^1 \cdot 1!} + \frac{1}{3^2 \cdot 2!} - \frac{1}{3^3 \cdot 3!} = \frac{58}{81} \approx 0.7160 \end{aligned}$$

בס"ד

<u>**שאלה 4:**</u>

2.1 סעיף א

באמצעות פיתוח טיילור מסדר 1 **הוכחה:** **(פתרון):** נפתח את $\exp(x)=e^x$ לפיתוח מקלורן מסדר 1:

$$\begin{aligned}\exp(x) &= e^x\\ \exp'(x) &= e^x\\ \exp''(x) &= e^x\end{aligned}$$

ואז $\exp(0)=1$ ו $\exp'(0)=1$ ומתקיים

$$\exp(x) = 1+x+R_1(x)$$

כאשר $R_1(x)=\frac{\exp''(c)}{2!}x^2=\frac{e^c}{2!}x^2$ וc בין 0 לx. לכן נקבל

$$\exp(x) = 1+x+R_1(x)=1+x+\frac{e^c}{2!}x^2$$

מתקיים $\frac{e^c}{2!}>0$ ו $x^2\geq 0$ ולכן $\frac{e^c}{2!}x^2\geq 0$ ואז

$$\exp(x) = 1+x+\frac{e^c}{2!}x^2\geq 1+x$$

כנדרש. ■

2.2 סעיף ב

ע"י חקירת נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)=e^x-x-1$ **הוכחה:** **(פתרון):**
נגדיר $g(x)=e^x-1-x$. נחקור תחומי עלייה וירידה של הפונקציה:

$$g'(x) = e^x-1$$

מתקיים כי $g'(x)=0 \iff e^x-1=0 \iff x=0$. מאחר ו$g'(x)$ היא פונקציה רציפה מתקיים כי מספיק לבדוק את סימנה עבור $x>0$ ו $x<0$ כלשהם כדי להחליט מהו סימנה בכל אחד מהתחומים. $g'(1)=e-1>0$ ו $g'(-1)=\frac{1}{e}-1<0$ ולכן $g'(x)>0$ ל $x>0$ ו $g'(x)<0$ ל $x<0$. מכאן g עולה ל $x>0$ וg יורדת ל $x>0$ ומכאן $x=0$ נקודת מינימום של g.

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ - & & + \\ \searrow & & \nearrow \end{array}$$

מתקיים $g(0)=0$ ולכן לכל $x<0$ מתקיים $g(x)>g(0)=0$ ולכל $x>0$ מתקיים $g(x)>g(0)=0$. לכן $g(x)\geq 0$ לכל x ממשי כנדרש. ■

<u>שאלה 5:</u>

תהי $f(x)=\ln(1+x)$.

א. הראו שלכל $-1<c$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f^{(n)}(c)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+c)^n}$.

ב. חשבו את $\ln(1.5)$ עם שגיאה קטנה מ 0.01 .

<u>פתרון:</u>

א. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $n\in\mathbb{N}$. $f^{(1)}(c)=\frac{1}{1+c}=\frac{(-1)^{1+1}(1-1)!}{(1+c)^1}$. נניח

נכונות ל n (כלומר שעבור n לכל $-1<c$ מתקיים $f^{(n)}(c)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+c)^n}$) ונוכיח

ל $n+1$. מהנחת האינדוקציה $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ לכל $-1<x$. עם נגזור את

הפונקציה פעם נוספת נקבל ש

$$f^{(n+1)}(x)=\left(\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}\right)'=(-1)^{n+1}(n-1)!\left(\frac{1}{(1+x)^n}\right)'=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!(-n)}{(1+x)^{n+1}}=\frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+x)^{n+1}}$$

ואם נציב $-1<c$ נקבל ש $f^{(n+1)}(c)=\frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+c)^{n+1}}$ כדרוש.

ב. מכיון ש $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ ומדובר

בטור לייבניץ אז ניתן לפתור גם בלא שימוש בשארית לגרנז'. איך? בטור

לייבניץ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ תמיד מתקיים $|S-S_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right|<a_{n+1}$ (וגם ידוע ש

$a_1>S$).

כעת, אם $0.01>a_{n+1}=\frac{0.5^{n+1}}{n+1}$ אז יתקיים גם $0.01>|S-S_n|=|R_n|$ וזה קורה אפילו

החל מ $n=4$.