תרגול 11 – אדם צ'פמן

התפלגות מעריכית

משתנה מקרי רציף X מתפלג מעריכית $X \sim Exp(\lambda)$ אם פונקציית הצפיפות שלו מקיימת

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

לכל $x \geq 0$, ו- $f_X(x) = 0$ עבור $x < 0$.

התוחלת היא $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ והשונות היא $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

קשר להתפלגות פואסון

אם מספר האירועים המתרחשים ביחידת זמן 1 הוא משתנה מקרי בדיד Y שמתפלג פואסון $Y \sim P(\lambda)$ אז הזמן בין אירועים עוקבים מתפלג מעריכית $X \sim Exp(\lambda)$.

דוגמא:

אם רעידת אדמה מתרחשת אחת לעשר שנים, אז מספר רעידות האדמה בעשר שנים מתפלג פואסון $P(1)$ ואז מספר רעידות האדמה בשנה אחת מתפלג $P(\frac{1}{10})$. לכן הזמן (ביחידות של שנים) בין רעידות אדמה עוקבות מתפלג $X \sim Exp(\frac{1}{10})$. ממוצע הזמן בין רעידות אדמה עוקבות הוא 10 שנים לפי הנוסחה שלמעלה.

שאלה:

בדוגמא למעלה, אם הסתיימה הרגע רעידת אדמה, מה הסיכוי שרעידת האדמה הבאה תתרחש בפרק זמן של יותר מעשר שנים מעכשיו?

תשובה:

$$P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x} dx = -e^{-\frac{1}{10}x}|_{10}^{\infty} = e^{-1}$$

התפלגות נורמלית

משתנה מקרי רציף X מתפלג נורמלית $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ אם פונקציית הצפיפות שלו המקיימת

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

לכל x. התוחלת היא $E(X) = \mu$ והשונות היא $V(X) = \sigma^2$ (סטיית התקן היא σ).

לפונקציה הקדומה אין ביטוי אנליטי, ולכן כל החישובים הם על-ידי קרובים נומריים. בפועל, כדי לעשות חישובים עם פונקציית ההצטברות, משתמשים בטבלה

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

המספרים בטבלה מייצגים את $P(X < C)$ כאשר C הוא סכום המספרים שמאפיינים את השורה והעמודה המתאימות, ו$X \sim N(0,1)$.

שאלה:

נתון $Z \sim N(0,1)$.

א. חשבו את $P(-2.07 < Z < 2.07)$.

ב. חשבו את $P(-0.13 < Z < 1.11)$.

פתרון:

לפי הטבלה $P(Z < 2.07) = 0.9808$, ומשום שההתפלגות סימטרית מקבלים $P(Z > -2.07) = 0.9808$. לכן $P(Z < -2.07) = 1 - 0.9808 = 0.0192$ ואז

$P(-2.07 < Z < 2.07) = P(Z < 2.07) - P(Z < -2.07) = 0.9616$.

שאלה:

אם $Z \sim N(0,1)$, מצא את C שעבורו

א. $P(Z < C) = 0.95$.
ב. $P(Z < C) = 0.01$.

פתרון:

המספר הכי קרוב ל0.95 המופיע בטבלה הוא בשורה 1.6 ובעמודה 0.05, אז C בסעיף א הוא 1.65.

המספר הכי קרוב בטבלה ל0.99 מופיע בשורה 2.3 בעמודה 0.03, ולכן $P(Z < 2.33) \approx 0.99$, ואז $P(Z > 2.33) \approx 0.01$. מטעמי סימטריה, $P(Z < -2.33) \approx 0.01$ אז C בסעיף ב הוא -2.33.

שאלה:

המכירות השבועיות של משחת שיניים "פה בריא" מתפלגות נורמלית עם ממוצע 10,000 וסטיית תקן 1,500.

א. מה ההסתברות שימכרו 12,000 שפופרות בשבוע?
ב. כמה שפופרות יש לייצר כדי שבהסתברות 95% לא ייגמר המלאי השבועי לפני תום השבוע?

פתרון:

צריך לחשב בכמה סטיות תקן 12,000 גבוה מהממוצע

$$\frac{12{,}000 - 10{,}000}{1{,}500} = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

לפי הטבלה, הסיכוי להיות 1.33 סטיות תקן מעל הממוצע הוא 0.9082, אז זו התשובה לסעיף א.

המספר הכי קרוב בטבלה ל0.95 מופיע בשורה 1.6 בעמודה 0.05, אז כדי להבטיח ב95% שלא יגמר המלאי, צריך לייצר 1.65 סטיות תקן מעל הממוצע, שזה

$$10{,}000 + 1{,}500 \cdot 1.65 = 12475$$