

פתרון תרגיל בית מספר 3

תנאי מוגטונית פה לא מתקיים ולכן אסור להשתמש מיד במבחן לייבניץ. נרשום

$$\frac{1}{n+100\sin n} = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n+100\sin n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} - 100 \frac{\sin n}{n(n+100\sin n)}$$

לכן:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+100\sin n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - 100 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin n}{n(n+100\sin n)}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{n(n+100\sin n)}$ מתכנס בהחלט לפי מבחני ההשוואה כי

$$\left| \frac{\sin n}{n(n+100\sin n)} \right| \leq \frac{1}{n(n+100\sin n)} \sim \frac{1}{n^2}$$

לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+100\sin n}$ מתכנס.

שאלה 8

א.

הסדרה $\frac{(\ln n)^{100}}{n}$ יורדת ל-0 באופן מוגטוני כאשר $n \rightarrow \infty$ לפי שאלה 7 טעיף א' ולכן טור מתכנס לפי מבחן דיריכלה.

ב.

$$\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1 - \cos 2n}{2n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2n}{n} \right]$$

נראה שטורים באגף ימין שנייהם מתכנסים.

טור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

נוכיח שטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2n}{n}$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה.

הסדרה $\frac{1}{n}$ יורדת ל-0 מוגטונית, ונשאר לבדוק ש-

$$\begin{aligned} \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots + (-1)^{n-1} \cos nx &= [\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots + (-1)^{n-1} \cos nx] \frac{\cos(x/2)}{\cos(x/2)} = \\ &= \frac{1}{2\cos(x/2)} [(\cos \frac{3}{2}x + \cos \frac{1}{2}x) - (\cos \frac{5}{2}x + \cos \frac{3}{2}x) + (\cos \frac{7}{2}x + \cos \frac{5}{2}x) - \dots + (-1)^{n-1} (\cos(n+\frac{1}{2})x + \cos(n-\frac{1}{2})x)] = \\ &= \frac{1}{\cos(x/2)} [\cos \frac{1}{2}x + (-1)^{n-1} \cos(n+\frac{1}{2})x] \end{aligned}$$

לכן $|\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots + (-1)^{n-1} \cos nx| \leq \frac{1}{|\cos(x/2)|}$ לכל $x \neq (2k+1)\pi$.

זאת אומרת, כל התנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2n}{n}$ מתכנס.

ג.

באותה רוח כמו שאלה 7, טעיף ג'.

$$\frac{\sin nx}{n + (-1)^{n-1}} = \sin nx \left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^{n-1}}{n(n + (-1)^{n-1})} \right)$$

טור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ מתכנס לפי מבחן דיריכזה.

טור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx (-1)^{n-1}}{n(n + (-1)^{n-1})}$ מתכנס בהחלט, כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס

ו- $\left| \frac{\sin nx (-1)^{n-1}}{n(n + (-1)^{n-1})} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n + (-1)^{n-1}}$ לכל x ממשי.