נכתב על ידי יהונתן רגב

שאלה

זורקים מטבע עד לכשלון הראשון, בצעד ה - X.

$$X \sim G\left(\frac{1}{2}\right), E(X) = 2$$

- הזכייה היא 1.5^X.

חישוב תוחלת הזכייה:

$$E(1.5^{X-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 2$$

- הזכייה היא a^X.

חישוב תוחלת הזכייה:

$$E(1.5^{X-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot a^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{a}{2}} = \frac{1}{2-a}$$

אבל: $E(2^X) = \infty$.

זהו הפרדוקס של סנט–פטרסבורג.

■

בעיית משחק החיים

מגרילים סדרת ערכים: $X_1, X_2, \cdots$ כאשר: $X_i \sim U[0,999]$.

נגדיר:

$$N_0 = \min\{i | X_i = 0\}$$

$$\forall 0 < k: N_k = \min\{i > N_{k-1} | X_i = k\}$$

מנצחים אחרי N_{999} מספרים.

שאלה

מהי $E(N_{999})$?

<u>פתרון</u>

$$N_0 \sim G\left(\frac{1}{1{,}000}\right)$$

$$\vdots$$

$$N_k - N_{k-`1} \sim G\left(\frac{1}{1{,}000}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$E(N_k - N_{k-1}) = 1{,}000$$

$$E(N_{999}) = 1{,}000{,}000$$

$$N_{999} \sim NB\left(1{,}000\,, \frac{1}{1{,}000}\right)$$

■

[בעיית אוסף הקופונים](#)

יש בשוק n סוגי קופונים.

מגרילים סדרה $X_1, X_2, \cdots$ כאשר: $X_i \sim U[1, n]$.

$$T = \min\left\{t \middle| \{1, \cdots, n\} \subseteq \{X_1, \cdots, X_t\}\right\}$$

$T=$ השלב הראשון שבו יש לי קופון אחד לפחות מכל סוג.

<u>שאלה</u>

מהי התוחלת של T?

<u>פתרון</u> (לא אפקטיבי)

נגדיר:

$$T_k = \{\min\{t | X_t = k\}$$

$$\Downarrow$$

$$T = \max\{T_1, \cdots, T_n\}$$

חישוב התוחלת של הנ"ל קשה לחישוב.

<u>פתרון</u>

נגדיר:

$$T_k = \min\{t | |\{X_1, \cdots, X_t\}| = k\}$$

$$\Downarrow$$

$$T = T_n$$

לכן:

$$T_1 = 1$$

$$T_2 - T_1 \sim G\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$T_3 - T_2 \sim G\left(\frac{n-2}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$T_n - T_{n-1} \sim G\left(\frac{1}{n}\right)$$

לכן:

$$E(T_1) = 1$$

$$E(T_2 - T_1) = \frac{n}{n-1}$$

$$E(T_3 - T_2) = \frac{n}{n-2}$$

$$\vdots$$

$$E(T_n - T_{n-1}) = n$$

$$\Downarrow$$

$$E(T_n) = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + \frac{n}{1} = n \cdot (\log n + \gamma)$$

■

סיכום

תהי $f: A \to B$ פונקציה מקרית.

כלומר, לכל $a \in A$: $f(a) \in B$ מקבל אחד הערכים באקראי.

נניח ש - $|B| = n$, $|A| > n \cdot \log n$.

סביר ש – f תהיה על.

■

פרדוקס יום ההולדת

זורקים m כדורים באקראי ל - n תאים.

סופרים התנגשויות, כלומר, זוגות כדורים שנפלו לאותו תא.

לכל זוג כדורים, i, j, נגדיר:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{נפלו לאותו תא} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$X_{ij} \sim b\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$X = \sum_{i<j} X_{ij}$$

שאלה

עבור m נתון, מהי התוחלת של X ?

פתרון

$$E(X) = \sum_{i<j} E(X_{ij}) = \binom{m}{2} \cdot \frac{1}{n} \sim \frac{m^2}{2 \cdot m}$$

כאשר $m \sim \sqrt{2 \cdot n}$ צפויות התנגשויות.

שאלה

נסמן ב – T את זמן ההופעה של ההתנגשות הראשונה.

ידוע:

$$E(T) = \sqrt{\frac{\pi \cdot n}{2}} + 2 + \cdots$$

■

שאלה

צריך להעריך את מספר הדגים באגם.

דגים 1,000 דגים, מסמנים אותם, ומחזירים אותם לאגם.

פעם נוספת דגים 2,000 דגים.

מתברר ש – 17 מהם מסומנים.

נסמן ב – n את מספר הדגים באגם.

$$X \sim H\left(\overbrace{2{,}000}^{\text{גודל השלל השני}} \quad ; \quad \overbrace{1{,}000}^{\text{סומנו בשלב הראשון}} \quad , n - 1{,}000\right)$$

$$X = 17$$

זהו נימוק (חלש) לכך ש:

$$\frac{2{,}000 \cdot 1{,}000}{n} = E(X) \sim 17$$

$$\Downarrow$$

$$n \sim 135{,}000$$

■

זורקים m כדורים ל – n תאים.

נגדיר:

לכל זוג כדורים, i,j, נגדיר:

$$X_{ij}=\begin{cases}1\,, & \text{נפלו לאותו תא}\\ 0\,, & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$E(X)=\binom{m}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

עפ"י הבנייה: X_{ij} בלתי תלויים בזוגות.

לכן:

$$V(X)=\binom{m}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

עפ"י הבנייה: X_{ij} אינם בלתי תלויים בשלשות.

שכן:

$$X_{ij}=X_{ik}=1\implies X_{jk}=1$$

$$\blacksquare$$

בעיה

נתונות n נקודות.

בין כל שתי נקודות מחברים קשת בהסתברות p.

נרצה לחקור את המצב כאשר $n\to\infty$ ו- $p\to 0$.

נתון:

$$p=f(n)\,,n\to\infty$$

1. מצב 1:

$$p=\frac{\lambda}{n^2}$$

2. מצב 2:

$$p=\frac{\lambda}{n^{1.5}}$$

<u>שאלה</u>

מתי (בערך) מופיע מעגל?

מתי (בערך) הגרף נהיה קשיר?