פתרונות לתרגיל 5

שאלה 1. הוכח\הפרך

1. תהי a_n סדרה כך ש-$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$ וכן היא מקיימת $\forall n \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ אז

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$$

2. תהי $\{a_n\}$ סדרה של מספרים ממשים אז $\{a_n\}$ מתכנסת אם ורק אם לכל תת סדרה $\{a_{n_k}\}$ יש תת סדרה מתכנסת.

3. הסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל-x_0 אם ורק אם לכל תת סדרה $\{x_{n_k}\}$ יש תת סדרה $\left\{x_{n_{k_j}}\right\}$ המתכנסת ל-x_0.

פתרון.

1. הפרכה:

ניקח $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ אז

$$\forall n \in \mathbb{N}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{1-\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n}}\right| = \frac{n^2}{n^2-1} > 1$$

מצד שני,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-1} = 1$$

את הוכחת הגבול ניתן לבצע לפי ההגדרה: יהיה $\epsilon > 0$ אז צריך למצוא $N \in \mathbb{N}$ שהחל ממנו מתקיים

$$\begin{gathered}\left|\frac{n^2}{n^2-1} - 1\right| < \epsilon \\ \Downarrow \\ \frac{1}{n^2-1} < \epsilon \\ \Downarrow \\ 1 < \epsilon n^2 - \epsilon \\ \Downarrow \\ n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} + 1}\end{gathered}$$

כיוון שלסדרה יש גבול הגבול העליון חייב להיות שווה לה, מכאן

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

2. הפרכה:

ניקח $a_n = (-1)^n$ אז בכל תת סדרה a_{n_k} קיימים אינסוף 1 או אינסוף -1 (או אינסוף משניהם), לא יתכן שיש מספר סופי של 1 ו--1 כי נקבל שהתת סדרה היא סופית, נניח בהכ שקיימים אינסוף 1 ניקח את התת סדרה הקבועה $a_{n_{k_j}}$ להיות הסדרה הקבועה 1, וקבלנו דוגמא לסדרה a_n שאינה מתכנסת אך לכל תת סדרה קיימת תת-תת-סדרה מתכנסת

3. נכון,

$(\Longleftarrow)$ אם x_n מתכנסת ל-x_0 אז כל תת סדרה שלה, x_{n_m}, מתכנסת ל-x_n ולכן כל תת סדרה של תת סדרה, $x_{n_{m_k}}$, מתכנסת ל-x_0.

$(\Longrightarrow)$ תהי x_n סדרה אז קיימים לה גבול עליון וגבול תחתון (במובן הרחב) כלומר קיימת תת סדרה $x_{n_m}^{(\sup)} \to \limsup(x_n)$ אבל נתון שלתת סדרה הזאת קיימת תת סדרה $x_{n_{m_k}}^{(\sup)}$ המתכנסת ל-x_0 לכן מתקיים $\limsup(x_n) = x_0$ באופן דומה מתקיים $\liminf(x_n) = x_0$ לכן בסה"כ מתקיים

$$\limsup(x_n) = x_0 = \liminf(x_n)$$

משמע הסדרה מתכנסת ל-x_0

שאלה 2. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש-$a_n \to a$ ו-$(-1)^n a_n \to b$ הוכח ש-$a = b = 0$

פתרון.

1. נתבונן שתי תתי סדרות של $b_n = (-1)^n a_n$ - האיברים במקומות האיזוגיים, $b_{n_k}^{(1)}$, והאיברים במקומות הזוגיים, $b_{n_k}^{(2)}$, אז

$$\begin{cases} \lim_{k\to\infty} b_{n_k}^{(1)} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} -a_{2n+1} = -a \\ \lim_{k\to\infty} b_{n_k}^{(2)} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = a \end{cases}$$

מצד שני, הן תתי סדרות של סדרה מתכנסת, b_n, לכן הן מתכנסות לגבול של הסדרה המקורית כלומר

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_k}^{(1)} = \lim_{k\to\infty} b_{n_k}^{(2)} = \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\Downarrow$$
$$-a = a = b$$
$$\Downarrow$$
$$a = b = 0$$

2. נכון,

$(\Longleftarrow)$ אם x_n מתכנסת ל-x_0 אז כל תת סדרה שלה, x_{n_m}, מתכנסת ל-x_n ולכן כל תת סדרה של תת סדרה, $x_{n_{m_k}}$, מתכנסת ל-x_0.

$(\Longrightarrow)$ תהי x_n סדרה אז קיימים לה גבול עליון וגבול תחתון (במובן הרחב) כלומר קיימת תת סדרה $x_{n_m}^{(\sup)} \to \limsup(x_n)$ אבל נתון שלתת סדרה הזאת קיימת תת סדרה $x_{n_{m_k}}^{(\sup)}$ המתכנסת ל-x_0 לכן מתקיים $\limsup(x_n) = x_0$ באופן דומה מתקיים $\liminf(x_n) = x_0$ לכן בסה"כ מתקיים

$$\limsup(x_n) = x_0 = \liminf(x_n)$$

משמע הסדרה מתכנסת ל-x_0