פתרון תרגיל 9 אנליזה הרמונית תשע"ט

10 בינואר 2019

1. (א) לפי הנוסחה:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ax}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(a-in)x}dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{(a-in)x}}{a-in}\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\left(a-in\right)}\left(e^{(a-in)\pi} - e^{-(a-in)\pi}\right)$$

נסדר קצת:

$$= \frac{1}{2\pi\left(a-in\right)}\left(e^{a\pi}e^{-in\pi} - e^{-a\pi}e^{-in\pi}\right) = \frac{\left(-1\right)^n\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}{2\pi\left(a-in\right)}$$

מכיוון ש: $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = \cos n\pi + i\sin n\pi = \left(-1\right)^n$.

(ב) לפי פרסבל:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x\right)\right|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2$$

נחשב את אגף שמאל:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x\right)\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{2ax}dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{2ax}}{2a}\Bigg|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{e^{2a\pi}-e^{-2a\pi}}{4a\pi}$$

נחשב את אגף ימין:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\left(-1\right)^n\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}{2\pi\left(a-in\right)}\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)^2}{4\pi^2\left(a^2+n^2\right)}$$

כלומר:

$$\frac{e^{2a\pi}-e^{-2a\pi}}{4a\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)^2}{4\pi^2\left(a^2+n^2\right)}$$

נסדר:

$$\frac{\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)\left(e^{a\pi}+e^{-a\pi}\right)}{4a\pi}=\frac{\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)^{2}}{4\pi^{2}}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^{2}+n^{2}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^{2}+n^{2}}=\frac{\pi\left(e^{a\pi}+e^{-a\pi}\right)}{a\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}$$

כעת, אפשר לרשום:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{a^{2}+n^{2}}+\frac{1}{a^{2}+0^{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{2}+n^{2}}=\frac{\pi\left(e^{a\pi}+e^{-a\pi}\right)}{a\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}$$

באגף שמאל, הטור השמאלי שווה לטור הימני, ולכן אפשר לרשום:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{2}+n^{2}}=\frac{\pi\left(e^{a\pi}+e^{-a\pi}\right)}{a\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}-\frac{1}{a^{2}}$$

נחלק ב־2, נוסיף את האיבר $\frac{1}{a^{2}}$ שמתאים לאינדקס $n=0$ ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^{2}+n^{2}}=\frac{\pi\left(e^{a\pi}+e^{-a\pi}\right)}{2a\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}+\frac{1}{2a^{2}}$$

עד כדי טעות חישוב.

2. נחשב את המקדמים:

$$c_{n}=\frac{1}{T-0}\int_{0}^{T}f\left(x\right)e^{-\frac{2\pi nix}{T-0}}dx=\frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}A\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\left(\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)\right)dx=$$

$$=\frac{A}{T}\left(\int_{0}^{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx-i\int_{0}^{\frac{T}{2}}\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)dx\right)$$

נשתמש בזהויות המתאימות:

$$=\frac{A}{T}\left(\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{T}+\frac{2\pi nx}{T}\right)+\sin\left(\frac{2\pi x}{T}-\frac{2\pi nx}{T}\right)}{2}dx-i\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{\cos\left(\frac{2\pi x}{T}-\frac{2\pi nx}{T}\right)-\cos\left(\frac{2\pi x}{T}+\frac{2\pi nx}{T}\right)}{2}dx\right)$$

$$=\frac{A}{2T}\left(\int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(\sin\left(\frac{2\pi\left(1+n\right)}{T}x\right)+\sin\left(\frac{2\pi\left(1-n\right)}{T}x\right)\right)dx-i\int_{0}^{\frac{T}{2}}\left(\cos\left(\frac{2\pi\left(1-n\right)}{T}x\right)-\cos\left(\frac{2\pi\left(1+n\right)}{T}x\right)\right.\right.$$

כעת:

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi(1-n)}{T}x\right)dx = \frac{T}{2\pi(1-n)}\sin\left(\frac{2\pi(1-n)}{T}x\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{T}{2}} = 0$$

ובאופן דומה:

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi(1+n)}{T}x\right)dx = 0$$

נשארנו עם:

$$c_n = \frac{A}{2T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi(1+n)}{T}x\right)dx + \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi(1-n)}{T}x\right)dx\right) =$$

$$= \frac{A}{2T}\left(-\frac{T}{2\pi(1+n)}\cos\left(\frac{2\pi(1+n)}{T}x\right) - \frac{T}{2\pi(1-n)}\cos\left(\frac{2\pi(1-n)}{T}x\right)\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{A}{4\pi}\left(-\frac{1-\cos(\pi(n+1))}{1+n} - \frac{1-\cos(\pi(1-n))}{1-n}\right) = -\frac{A}{4\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1-(-1)^{1-n}}{1-n}\right)$$

מכאן, אם n אי־זוגי אז $c_n = 0$. אם $n = 2k$ זוגי, נקבל:

$$c_{2k} = -\frac{A}{4\pi}\left(\frac{2}{n+1} + \frac{2}{1-n}\right) = -\frac{A}{2\pi}\cdot\frac{1-n+n+1}{1-n^2} = \frac{A}{\pi(n^2-1)} = \frac{A}{\pi(4k^2-1)}$$

תוך כדי ריצה חילקנו בביטויים $n+1$, $1-n$, מה שאסור לעשות כאשר $n = \pm 1$, ולכן נחשב את המקדמים המתאימים לאינדקסים האלו בנפרד. את כל השלבים לפני האינטגרציה אפשר לעשות, ונקבל:

$$c_1 = \frac{A}{2T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{4\pi}{T}x\right)dx - i\int_0^{\frac{T}{2}} 1 - \cos\left(\frac{4\pi}{T}x\right)dx\right)$$

$$= \frac{A}{2T}\left(-\frac{T}{4\pi}\cos\left(\frac{4\pi}{T}x\right) - i\left(x - \frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}x\right)\right)\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{A}{2T}\left(-\frac{T}{4\pi} - i\frac{T}{2} + \frac{T}{4\pi}\right) = -\frac{A}{4}i$$

ובאופן דומה:

$$c_{-1} = \frac{A}{2T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{4\pi}{T}x\right)dx - i\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{T}x\right) - 1\right)dx\right) = \frac{A}{4}i$$

אחרון חביב, המקדם c_0:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f\left(x\right)dx = \frac{1}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} A\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)dx = \frac{A}{T}\cdot\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right)\Big|_{x=0}^{x=\frac{T}{2}} = \frac{A}{2\pi}\left(-1-1\right) = -\frac{A}{\pi}$$

סה"כ, טור פורייה הוא:

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{A}{\pi\left(4k^2-1\right)}e^{\frac{4\pi kix}{T}} + \frac{A}{4}ie^{-\frac{2\pi ix}{T}} - \frac{A}{4}ie^{\frac{2\pi ix}{T}}$$

עד כדי טעות חישוב, כמובן.