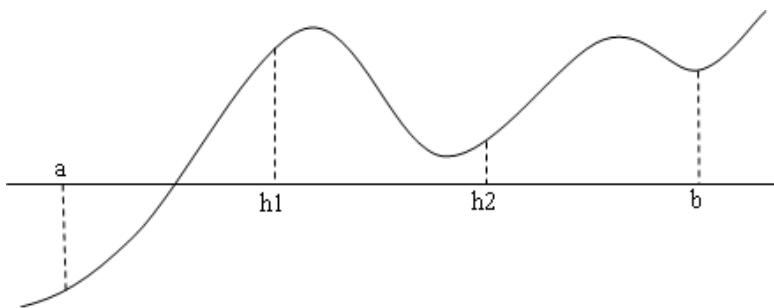


תרגיל בית 2.

פתרון משוואה לא ליניארית

1. נניח שמתמשים בשיטת החצייה למציאת אפס הפונקציה $f(x)$ בקטע $[2,7]$. כמה פעמים צריך לחלק את הקטע כדי להבטיח שדיוק הקירוב יהיה $5 \cdot 10^{-9}$?

2. נשנה את שיטת החצייה ל"שיטת השלישונים" אשר מחלקת את הקטע הנוכחי לשלושה חלקים ובוחרת את הקטע השמאלי ביותר שעבור נקודות הקצה שלו יש סימנים הפוכים. לדוגמא בציר שלהלן אם נקודות הקצה של הקטע הנוכחי הן a ו b נחשב שתי נקודות ביניהן $h_1 = a + (b-a)/3$ ו $h_2 = a + 2(b-a)/3$



במקרה זה נשים לב כי ל- $f(a)$ סימן הפוך מ- $f(h_1)$ ולכן קטע זה יהיה הקטע החדש. תנו נוסחה לחישוב הדיוק של "שיטת השלישונים" לאחר איטרציות, האם יש יתרון לשיטה זו על פני שיטת החצייה. (רמז: התייחסו לדיוק היחסי של שתי השיטות לאחר $2n$ חישובים של ערך הפונקציה).

3. לפתרון המשוואה $x^3 + x = 1000$, הציעו שלושת איטרציות הבאות

$$x_{n+1} = 1000 - x_n^3 \quad (1) \quad x_{n+1} = \frac{1000}{x_n^2} - \frac{1}{x_n} \quad (2) \quad x_{n+1} = \sqrt[3]{1000 - x_n} \quad (3)$$

ידוע כי שורש המשוואה נמצא בקטע $(9,10)$.

(א) בדקו עבור כל איטרציה האם היא מתכנסת עבור כל נקודה בקטע נתון. עבור איטרציות מתכנסות הגדירו מהם סדר התכנסות וקבוע התכנסות;

(ב) הוכיחו את ההתכנסות/התבדרות של האיטרציות הנ"ל בשיטה גרפית ("שיטת העכביש"), כאשר הניחוש ההתחלתי הוא $x_0 = 10$;

(ג) הציעו איטרציה משלכם ובדקו האם היא מתכנסת (אם כן - מצאו סדר וקבוע התכנסות).

4. נתונה המשוואה

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

(א) הראו שיש לה בדיוק שורש ממשי אחד בקטע $(1.6, \infty)$

(ב) מצאו קירוב ל- x^* (שורש אמיתי/נקודת שבת) על ידי כתיבת המשוואה בצורה

$$x = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = G(x)$$

ובדקו שעבור קירוב התחלתי $x_0 = 1.6$, האיטרציה $x_{n+1} = G(x_n)$ מתכנסת. האם יש התכנסות עבור כל ערך של $x_0 > 1.6$?

5. האם אפשר להשתמש בשיטת ניוטון לצורך הפתרון של המשוואה $x^{\frac{1}{3}} = 0$? הסבירו את תשובתכם.

6. מצאו את השורש של המשוואה: $f(x) = x^3 + 13.8x^2 + 42.2x - 9$ שנמצא בקטע $[0, 1]$ עם

$$tol = 10^{-6} \text{ (שגיאה)}. \text{ התייחסו לשגיאה כ- } \varepsilon_n = |x_{n+1} - x_n|.$$

(א) בשיטת ניוטון-רפסון

(ב) בשיטת המיתר

(ג) בשיטת המקום השגוי (regula falsi).

(ד) השוו בין השיטות השונות מבחינת מספר איטרציות, סדר ושיעור התכנסות.

7. נתונה איטרצית נקודת השבת $x_{n+1} = \frac{112233 + Ax_n^2}{Bx_n}$. מצאו ערכים של A ו- B כך שהאיטרציה

תתכנס לשורש α עם סדר התכנסות מקסימאלי. מהו סדר ההתכנסות המקסימאלי?

8. היכן נחתכים הגרפים של $y = \cos(x)$ ושל $y = x^3 - 1$? פתרו את הבעיה ב matlab, בעזרת

שיטת החצייה ובעזרת Regula Falsi. הציגו את הקוד והשוו את ביצועי האלגוריתמים (מספר

איטרציות ואופן הצקדמות הניחוש) תוך שימוש באותם תנאי התחלה: $a = x_0 = -3$, $b = x_1 = 3$

השוו את החישוב עבור $\delta = 0.01$ וגם $\delta = 0.0001$.

בהצלחה!