תתי מרחבים

הגדרה: תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$. כלומר, A היא קבוצה של וקטורים מאותו גודל.
נגיד שA היא תת מרחב אם מתקיימות התכונות הבאות:
1. $0 \in A$ (וקטור ה0)
2. סגירות לחיבור: לכל $v_1, v_2 \in A$, מתקיים ש: $v_1 + v_2 \in A$
3. סגירות לכפל בסקלר: לכל $v \in A$ ו$\alpha \in \mathbb{R}$, מתקיים $\alpha v \in A$.

דוגמאות:
1. $A \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$A = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \geq 0\}$$

קבעו האם A היא תת מרחב.
פתרון:
תכונה ראשונה: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in A$
תכונה שניה: נניח $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in A$. האם $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in A$?
מהנתון ש$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in A$ נובע שבשני הוקטורים כל הרכיבים אי שליליים. כלומר, $x_1, y_1, x_2, y_2 \geq 0$.
לכן נסיק ש $x_1 + x_2 \geq 0$ ו$y_1 + y_2 \geq 0$. כלומר $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in A$.
הוכחנו שיש סגירות לחיבור.
תכונה שלישית: יהי $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A$ ו$\alpha \in \mathbb{R}$. האם $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \in A$?
לא. בשביל להוכיח שלא צריך להצביע על דוגמא קונקרטית. למשל

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in A$$

$\alpha = -1$

$$-1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin A$$

2. $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : xy \geq 0 \right\}$$

שקול להגיד שx וy, שניהם גדולים שווים מ0 או שניהם קטנים שווים מ0 . (יש להם את אותו סימן).
האם זה תת מרחב?
פתרון: תכונה ראשונה: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in A$

תכונה שלישית: אם $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A$ ו$\alpha \in \mathbb{R}$ האם $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \in A$?

כן. כי $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A$ גורר ש$xy \geq 0$. לכן $(\alpha x)(\alpha y) = \alpha^2 xy \geq 0$.

תכונה שניה: יהיו $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in A$. האם $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in A$?

לא. למשל

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in A$$

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \notin A$$

3. $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 2x + y = 0 \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \in A$$

האם A היא תת מרחב?

תכונה ראשונה: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in A$ כי $2 \cdot 0 + 0 = 0$

תכונה שניה: נניח ש$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in A$. האם $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in A$?

מהנתון ש$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in A$ מסיקים ש $2x_1 + y_1 = 0, 2x_2 + y_2 = 0$.

$$2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2) = 0 + 0 = 0$$

כלומר, $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in A$.

תכונה שלישית: יהי $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A$ ו$\alpha \in \mathbb{R}$.

מהנתון ש$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A$ מקבלים ש$2x + y = 0$. אנחנו רוצים לדעת האם $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \in A$?

$$2(\alpha x) + \alpha y = \alpha(2x + y) = \alpha \cdot 0 = 0$$

כלומר $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \in A$.

הוכחנו שA היא תת מרחב.

הקריטריון המקוצר להוכחת תת מרחב:

בשביל להוכיח שA תת מרחב, אפשר להסתפק בהוכחה של 2 התכונות הבאות:

1. $0 \in A$.
2. לכל $v, u \in A$ ו$\alpha \in \mathbb{R}$, צריך להתקיים ש$v + \alpha u \in A$. (יש אנשים שעושים את התכונה הבאה: $\alpha v + \beta u$ עבור α, β כלשהם)

דוגמא: קבעו האם הקבוצה הבאה היא תת מרחב.

$$A \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - y + 3z = 0 \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

תכונה ראשונה: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in A$ כי $0 - 0 + 3 \cdot 0 = 0$

תכונה שניה: יהיו $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in A$ ו$\alpha \in \mathbb{R}$. האם $\begin{pmatrix} x_1 + \alpha x_2 \\ y_1 + \alpha y_2 \\ z_1 + \alpha z_2 \end{pmatrix} \in A$?

מהנתון ש$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in A$ אנחנו מסיקים ש: $x_1 - y_1 + 3z_1 = 0, x_2 - y_2 + 3z_2 = 0$.

$$(x_1 + \alpha x_2) - (y_1 + \alpha y_2) + 3(z_1 + \alpha z_2) =$$

$$(x_1 - y_1 + 3z_1) + \alpha(x_2 - y_2 + 3z_2) = 0 + \alpha \cdot 0 = 0$$

קיבלנו שהתנאי השני מתקיים, לכן A היא תת מרחב.

דוגמא קנונית: תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

אוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית

$$Ax = 0$$

מהווה תת מרחב.

כלומר, הקבוצה

$$N(A) = \{v \in \mathbb{R}^{m \times 1} : Av = 0\}$$

מהווה תת מרחב.

הוכחה: $0 \in N(A)$. כי $A0 = 0$.
נניח ש$v, u \in N(A)$ ו$\alpha \in \mathbb{R}$. רוצים להוכיח ש$v + \alpha u \in N(A)$.

$$A(v + \alpha u) = Av + A\alpha u = Av + \alpha Au = 0 + \alpha \cdot 0 = 0$$

לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

צירופים ליניאריים

הגדרה: יהיו $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$. צירוף ליניארי של הוקטורים הוא וקטור מהצורה:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m$$

לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

שאלה: האם הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$?

אנחנו בעצם שואלים האם קיימים α, β כך ש :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מערכת של 3 משוואות בשני נעלמים :

$$\alpha + 3\beta = 1$$

$$2\alpha + 2\beta = 1$$

$$\beta = 1$$

נמיר לצורת מטריצה :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

השאלה : האם למערכת יש פתרון?
למערכת הנ"ל אין פתרון. ולכן הוקטור הוא לא צירוף של השניים האחרים.
דוגמא נוספת : האם הוקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

פתרון : צריך לבדוק האם למערכת הבאה יש פתרון

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & -9 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 10 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{9}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{10}R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ניתן לראות שאין שורת סתירה. למעשה יהיה פתרון יחיד.

מכיוון שיש פתרון למערכת, אז הוקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

הגדרה: יהיו $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$. האוסף של כל הצירופים הלינאריים של $v_1, ..., v_m$ נקרא

$$span\{v_1, ..., v_m\}$$

(בתרגום חופשי, מה שנפרש ע"י הוקטורים האלה).

משפט: לכל קבוצה של וקטורים $v_1, ..., v_m$, $span\{v_1, ..., v_m\}$ הוא תת מרחב.

הוכחה:

תכונה ראשונה:

$$0 \in span\{v_1, ..., v_m\}$$

$$0 = 0v_1 + ...0v_m$$

תכונה שניה: נניח ש$u, w \in span\{v_1, ..., v_m\}$ ו$\lambda \in \mathbb{R}$, רוצים להוכיח ש $u + \lambda w \in span\{v_1, ..., v_m\}$

$$u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m$$

$$w = \beta_1 v_1 + ... + \beta_m v_m$$

$$u + \lambda w = (\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m) + \lambda(\beta_1 v_1 + ... + \beta_m v_m) =$$

$$(\alpha_1 + \lambda\beta_1)v_1 + ... + (\alpha_m + \lambda\beta_m)v_m$$

לכן $u + \lambda w \in span\{v_1, ..., v_m\}$.

מש"ל.