תרגיל 7

שאלה 1

קבעו התכנסות או התבדרות של הטורים הבאים:

i. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}+2}{(n+3)^3-2}$

פתרון: רואים לפי חזקות גבוהות כי כדאי לבצע השוואה עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$. לפי מבחן השוואה שני נקבל:

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^{5/2}(\sqrt{n+3}+2)}{(n+3)^3-2}=\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{(1+\frac{3}{n})^3-\frac{2}{n^3}}\to 1>0$ כלומר הטורים החיוביים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}+2}{(n+3)^3-2}$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו. אך הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ מתכנס לפי מבחן השוואה ראשון עם הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ שראינו בעבר שהוא מתכנס.

ii. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

פתרון: לפי דלמבר $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2(n+1))!(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\to\frac{1}{4}$ לכן הטור מתכנס.

iii. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

פתרון: לפי מבחן השוואה ראשון עם הטור ההרמוני נקבל כי הטור הנתון מתבדר:

$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}>\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ כי $n>\ln n>\sqrt[n]{\ln n}$.

שאלה 2

i. יהיו $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טורים חיוביים, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ טור מתכנס. כמו כן נתון כי $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n . הוכיחו כי גם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור מתכנס. (רמז: הסתכלו על הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{b_1}$).

פתרון: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{b_1}$ מתכנס כי הוא כפל בקבוע של הטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. מהנתון נקבל: $\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_2}{b_1}$, כמו כן: $\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}\frac{a_2}{a_1}\le\frac{b_3}{b_2}\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_1}$. כלומר באותו האופן (באינדוקציה) נראה כי $\frac{a_n}{a_1}\le\frac{b_n}{b_1}$ לכל n .

לכן לפי משפט השוואה ראשון של טורים חיוביים נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_1}$ מתכנס.

לכן גם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס כי הוא כפל בקבוע של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_1}$.

ii. תלמיד בקורס אינפי' "פתר" את סעיף i. כדלהלן: " $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טור חיובי מתכנס לכן לפי מבחן דלמבר $\limsup \frac{b_{n+1}}{b_n}<1$. לכן מהנתון $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ לכן לפי מבחן דלמבר הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס."
הפתרון שגוי. מה השלב השגוי בפתרון? הסבירו.

<u>פתרון:</u> המעבר הראשון שגוי: אם טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס זה לא אומר ש- $\limsup \frac{b_{n+1}}{b_n}<1$.

למשל: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס אך $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{(n+1)^2}\rightarrow 1$ כלומר $\limsup \frac{b_{n+1}}{b_n}=1$.