למה של בראואר:

יהי R חוג, ויהי $I\leq R$ אידאל שמאלי מינימלי ($I\neq(0)$, לא קיים $(0)\lneq J\lneq I$)

נניח כי $I^2\neq(0)$. אזי קיים $e\in I$ כך ש:

1) $e^2=e$

2) $I=Re$

3) eRe הוא חוג עם חילוק (eRe הוא חוג עם איבר יחידה e) ($eRe=\{ere : r\in R\}$)

הוכחה:

בפעם הקודמת הוכחנו (1),(2). נשאר להוכיח כי eRe הוא חוג עם חילוק.

יהי $0\neq a\in eRe=eI\subseteq I$. לכן Ra אידאל שמאלי של R,

$(0)\neq Ra\leq I \Rightarrow Ra=I \Rightarrow$ קיים r כך ש- $ra=e$. נשים לב כי r לאו דווקא מוכל ב- eRe.

אבל, $a\in eRe \Rightarrow a=ebe$ עבור $b\in R$ מתאים, לכן

$$(ere)a=ereebe=erebe=era=e^2=e$$

צריך להוכיח גם כי $a(ere)=e$. עכשיו הוכחנו שלכל איבר של eRe יש הופכי שמאלי ב- eRe.

בפרט, גם ל- ere יש הופכי שמאלי $x\in eRe$, כלומר $xere=e$. אז:

$$a=ea=xerea=xe=x$$

לכן גם $a(ere)=e$. ולכן eRe הוא חוג עם חילוק.

משפט (wedderburn):

יהי R חוג פשוט (ללא אידאלים דו-צדדיים מלבד $(0),R$). נניח כי ל-R יש אידאל שמאלי מינימלי I. אזי $R\cong M_n(D)$ כאשר $n\in\mathbb{N}$, D חוג עם חילוק.

הערה: יהי R חוג פשוט. אזי ל-R יש אידאל שמאלי מינימלי $\Leftrightarrow$ R ארטיני משמאל.

הוכחה (של המשפט):

יהי R חוג פשוט, יהי I אידאל שמאלי מינימלי. אזי $IR=\{a_1b_1+\dots+a_nb_n \mid a_i\in I,\ b_i\in R\}$ הוא אידאל דו-צדדי של R. אך R פשוט, לכן $IR=R$. לכן,

$RI=I$ כי I אידאל שמאלי

$$R=RR=I\overbrace{RI}R=I^2R$$

ובפרט $I^2\neq(0)$. לכן ניתן להשתמש בלמה של Brauer, וקיים $e\in I$ כך ש:

$e^2=e$, $I=Re$, $D=eRe$ הוא חוג עם חילוק.

נשים לב כי $D\subseteq I$. לכן יש ל-I מבנה של D-מודול ימני. לכל $d\in D$, $a\in I$ נגדיר כפל סקלרי $a\cdot d=ad\in I$.

יהי $End_D(I)$ החוג של הומומורפיזמים $f:I\to I$ של D-מודולים ימניים. (כפל = הרכבה)

לכל $r\in R$ נגדיר $\alpha_r\in End_D(I)$, $\alpha_r(a)=ra$. זה הומ' של חבורות $\alpha_r(a+b)=r(a+b)=ra+rb$.

זה הומ' של D-מודולים ימניים כי $\alpha_r(ad)=rad=\alpha_r(a)\cdot d$.

אז מקבלים העתקה $f:R\to End_D(I)$
$f(r)=\alpha_r$

תת טענה: f הוא איזומורפיזם של חוגים.

הוכחה:

f הומ' כי $\alpha_{r+s}(a)=(r+s)a=ra+sa=\alpha_r(a)+\alpha_s(a)$. לכן $\alpha_{r+s}=\alpha_r+\alpha_s$ לכל $r,s\in R$. לכן $f(r+s)=f(r)+f(s)$. כמו כן, $\alpha_{rs}=rsa=\alpha_r(\alpha_s(a))$. לכן, $f(rs)=f(r)\cdot f(s)$, ברור כי $\alpha_1=id$.

f חח"ע: יהי $r\in\ker f$ אזי $\alpha_r=0 \Leftarrow ra=0$ לכל $a\in I$. זה אומר כי $rI=0$, $r=r\cdot 1\in rR=rIR=0$ לכן $r=0$. לכן f חח"ע

f על: ידוע לנו כי $1\in R=IR=ReR$. בפרט, $r_i,s_i\in R$, $1=\sum_{i=1}^n r_i e s_i$. יהי $\alpha\in End_D(I)$. לכל $re\in I$ $(r\in R)$,

בגלל צריך פשטות של R

$$\alpha(re)=\alpha(1\cdot re)=\alpha\Big(\sum_{i=1}^n r_i e s_i re\Big)=\alpha\Big(\sum_{i=1}^n \underbrace{r_i e}_{\in I}\cdot \underbrace{e s_i re}_{\in eRe=D}\Big)=\sum_{i=1}^n \alpha(r_i e)\cdot e s_i re=\Big(\sum_{i=1}^n \alpha(r_i e) e s_i\Big)re=\alpha_x(re)$$

כאשר $x=\sum_{i=1}^n \alpha(r_i e)es_i$. לכן הוכחנו $R\simeq End_D(I)$.

תת טענה: יהי D חוג עם חילוק. כל D-מודול הוא חופשי.

הוכחה:

יהי M D-מודול (ימני). לפי הלמה של צורן, קיימת הקבוצה בת"ל מקסימלית S.

צריך להוכיח כי S פורשת את M. נניח שקיים $v\notin span(S)$. לפי המקסימליות של S, הקבוצה $S\cup\{v\}$ לא בת"ל $\Leftarrow vd+s_1d_1+\dots+s_nd_n=0 \Leftarrow v=-s_1d_1d^{-1}-\dots-s_nd_nd^{-1}$ בסתירה להנחה $v\notin span(S)$.

(כאן השתמשנו רק בעובדה שאפשר לחלק ב-d. אותה הוכחה כמו בלינארית)

בחזרה להוכחה של Wedderburn:

תת טענה: I נוצר סופית מעל D

הוכחה:

נניח שלא. אזי $J=\{\alpha\in End_D(I): \alpha(I)$ נוצרת סופית מעל $D\}$ הוא אידאל דו-צדדי של $End_D(I)$

החוג הזה פשוט, $id\notin J \Leftarrow J=(0)$. זה לא יתכן. ניקח הטלה על תת מרחב חד-ממדי.

לכן I ל-I יש בסיס סופי מעל D, $End_D(I)\leftrightarrow M_n(D)$.

יהי $b_1,\dots,b_n$ בסיס, $\begin{pmatrix}-\alpha(b_1)-\\-\alpha(b_2)-\\ \vdots\\-\alpha(b_n)-\end{pmatrix}\leftrightarrow\alpha$. זה נותן איזומורפיזם של חוגים:

$R\simeq End_D(I)\simeq M_n(D)$

הערה: יש חוגים פשוטים שאינם ארטיניים משמאל

למשל:

האלגברה של וייל. $R=\mathbb{R}\langle x,\partial\rangle/_{\partial x=x\partial+1}$. יש לנו R-מודול טבעי.

יהי $\{$פונקציות חלקות $C^\infty=M=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $x\cdot f=xf$, $\partial\cdot f=f'$

$(\partial x)f=(xf)'=f+xf'=(1+x\partial)\cdot f$

אם נשתמש ביחס $\partial x=x\partial+1$, נראה שניתן להציג כל $p\in R$ באופן יחיד כסכום של מונומים

מהצורה $ax^m\partial^n$ $(a\in\mathbb{R})$

נראה ש-R הוא חוג פשוט:

יהי $(0)\neq I\trianglelefteq R$ אידאל דו צדדי. צריך להוכיח כי $I=R$. כלומר, I מכיל איבר הפיך.

יהי $0\neq p\in I$. נשים לב כי $\partial x^m=mx^{m-1}+x^m\partial$. לכן, $\partial(x^m\partial^n)-(x^m\partial^n)\partial=mx^{m-1}\partial^n$.

לכן, בכל מונום של $\partial p-p\partial\in I$ x מופיע בחזקה נמוכה מהמונום המקביל של p.

אם נעשה את זה מספיק פעמים, נקבל איבר של I שהוא רק פולינום במשתנה ∂, אין בו x כלל.

באינדוקציה מחוק לייבניץ

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$(xf)^{(n)} = xf^{(n)} + nf^{(n-1)} \quad \rightarrow \quad \partial^n x = x\partial^n - n\partial^{n-1}$$

יהי $Q \in I$ פולינום ב-∂. $Qx - xQ \in I$

$Q = \sum_{n=0}^{N} a_n \partial^n \Leftarrow Qx - xQ = \sum_{n=0}^{N} a_n n \partial^{n-1}$. כך מורידים את המעלה של Q. בסוף מקבלים איבר של I שהוא פולינום לא אפסי ממעלה 0, כלומר קבוע. כלומר, כל $I \neq (0)$ מכיל איבר הפיך של R, לכן R פשוט.

תרגיל: R לא ארטיני משמאל $(xR \supsetneq x^2R \supsetneq x^3R \supsetneq \dots)$

תרגיל: $R \simeq M_n(D)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל חוג עם חילוק D. שהרי $M_n(D)$ כן ארטיני משמאל.

תרגיל: האידאלים השמאליים המינימליים של $M_n(D)$ נראים כך:

$$I_k = \{A \in M_n(D) \mid a_{ij} = 0 \ \forall i, \forall j \neq k, \ a_{ik} \in D\}$$

אין תורת מבנה של חוגים פשוטים לא ארטיניים.