<u>מד"ר למתמטיקאים 88240 – תרגיל מס' 3 – קיץ תשע"ב</u>
<u>משוואת אוילר ופתרון טורי (רגיל ומוכלל) של מד"ר לינארית הומוגנית</u>
<u>מסדר 2 עם מקדמים לא קבועים</u>

1. נתונה משוואת לג'נדר: $\sim\in\mathbb{R}$, $(1-x^2)y''-2xy'+\sim(\sim+1)y=0$.

א. הראו ששני פתרונות של המשוואה עבור $|x|<1$ הם:

$$y_1(x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sim(\sim-2)(\sim-4)...(\sim-2m+2)(\sim+1)(\sim+3)...(\sim+2m-1)}{(2m)!}x^{2m}$$

$$y_2(x)=x+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(\sim-1)(\sim-3)...(\sim-2m+1)(\sim+2)(\sim+4)...(\sim+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

ב. (1) הראו שאם $\sim=2n,\ n=0,1,2,..$, כלומר מספר ממשי זוגי או אפס, אז y_1 הוא פולינום מדרגה $2n$ שיש לו רק חזקות זוגיות של x . הראו כי הפתרונות המתאימים ל- $\sim=0,2,4$ הם $1,1-3x^2,1-10x^2+\frac{35}{3}x^4$.

(2) הראו שאם $\sim=2n+1,\ n=0,1,2,..$ אזי הפתרון y_2 הוא פולינום מדרגה $2n+1$ שמכיל חזקות אי זוגיות של x . הראו כי הפתרונות המתאימים ל- $\sim=1,3,5$ הם $x,x-\frac{5}{3}x^3,x-\frac{14}{3}x^3+\frac{21}{5}x^5$.

2. פתרו את המשוואות הבאות, מצאו פתרון כללי:

א. $(x-2)^2y''+5(x-2)y'+8y=0$ בתחום $x>2$.

ב. $x^2y''+7xy'+5y=x$

ג. $x^2y''+xy'+4y=\sin(\ln x)$

ד. $x^2y''-2xy'+2y=3x^2+2\ln x$

<u>הערה:</u> את הסעיפים ב', ג', ד' פתרו בתחום $x>0$.

3. הראו שלמשוואות הדיפרנציאליות הבאות יש נקודה סינגולרית-רגולרית ב- $x=0$. מצאו את המשוואה האינדיציאלית , את יחס הרקורסיה ואת השורשים של המשוואה האינדיציאלית. מצאו את הפתרון בצורה של טור עבור $x>0$, עבור השורש הגדול יותר. אם השורשים שונים זה מזה ואינם נבדלים במספר שלם, מצאו את הפתרון המתאים לשורש הקטן גם כן.

א. $2xy''+y'+xy=0$.

ב. $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$

4. משוואת לגר (Laguerre) היא:

$$xy''+(1-x)y'+\mathrm{a}y=0$$

א. הראו כי $x=0$ היא נקודה סינגולרית-רגולרית. מצאו את המשוואה האינדיציאלית, שורשיה, יחס הנסיגה והפתרון עבור $x>0$.

ב. הראו כי אם $ª = m$, מספר שלם חיובי, אזי הפתרון הוא פולינום. אם הפולינום ינורמל בצורה מסויימת, נקבל את פולינום לגר $L_m(x)$.

5. (1). משוואת בסל (Bessel) מסדר 0 היא:

$$x^2 y''+xy'+x^2 y=0$$

הראו כי $x=0$ היא נקודה סינגולרית-רגולרית, וכי שורשי המשוואה האינדיציאלית הם $r_1=r_2=0$.

קבלו פתרון אחד של המשוואה עבור $x>0$ כך:

$\mathrm{J}_0(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$. זוהי פונקצית בסל מסוג ראשון ומסדר 0.

רשמו צורה כללית עבור הפתרון השני (ללא חישוב מפורש של המקדמים), עפ"י משפט פרובניוס.

(2). משוואת בסל מסדר 1 היא:

$$x^2 y''+xy'+(x^2-1)y=0$$

הראו כי $x=0$ היא נקודה סינגולרית-רגולרית, כי שורשי המשוואה האינדיציאלית הם $r_1=1, r_2=-1$ ופתרון אחד עבור $x>0$ הוא:

$\mathrm{J}_1(x)=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n+1)!n!}$. זוהי פונקצית בסל מסוג 1 מסדר 1.

רשמו צורה כללית עבור הפתרון השני (ללא חישוב מפורש של המקדמים), עפ"י משפט פרובניוס.

6. במספר בעיות בפיסיקה מתמטית (למשל משוואת שרדינגר עבור אטום מימן) , מתקבלת המשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$x(1-x)y''+[¥-(1+\sim+\quad)x]y'-\sim\quad y=0$$

באשר ¥, , ~ הם קבועים. משוואה זו נקראת המשוואה ההיפרגיאומטרית.

א. הראו כי $x=0$ היא נקודה סינגולרית-רגולרית וכי שורשי המשוואה האינדיציאלית הם 0 ו- $1-¥$.

ב. הניחו כי $1-¥$ איננו שלם או 0 והראו כי בסביבת $x=0$ פתרון אחד הוא:

$$\mathrm{y}_1(x)=1+\frac{\sim}{¥1!}x+\frac{\sim(\sim+1)\quad(\quad+1)}{¥(¥+1)2!}x^2+\dots$$

ג. הניחו כי $1-¥$ איננו שלם או 0 והראה כי בקטע $0<x<1$, פתרון נוסף הוא:

$$\mathrm{y}_2(x)=x^{1-¥}[1+\frac{(\sim-¥+1)(\quad-¥+1)}{(2-¥)1!}x+$$
$$+\frac{(\sim-¥+1)(\sim-¥+2)(\quad-¥+1)(\quad-¥+2)}{(2-¥)(3-¥)2!}x^2+\dots]$$