תרגיל 10 בפונקציות מרוכבות

1. בשאלה זו אנחנו נגיד ש z_0 הוא אפס מסדר 0 אם $f(z_0) \neq 0$ כמו כן, נתייחס לסינגולריות סליקה כאל קוטב מסדר 0. יהי z_0 אפס מסדר m של $f(z)$ ואפס מסדר r של $g(z)$. (f, g אנליטיות בסביבת z_0).

(א) הוכיחו כי z_0 הוא אפס מסדר $m+r$ של $f(z)g(z)$

פתרון: לפי הנתון, קיימים $\tilde{f}(z), \tilde{g}(z)$ אנליטיות בסביבת z_0 כך ש z_0 אינו אפס שלהם ומתקיים

$$f(z) = (z - z_0)^m \tilde{f}(z)$$

$$g(z) = (z - z_0)^r \tilde{g}(z)$$

לכן

$$f(z)g(z) = (z - z_0)^{m+r} \tilde{f}(z)\tilde{g}(z)$$

כמובן שהפונקציה $\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)$ אנליטית בסביבת z_0 והוא אינו אפס שלה ולכן לפי הגדרה z_0 הוא אפס מסדר $m+r$ של $f(z)g(z)$

(ב) אם $m > r$ הוכיחו כי z_0־ הוא אפס מסדר $m-r$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$.

פתרון: לפי הנתון, קיימים $\tilde{f}(z), \tilde{g}(z)$ אנליטיות בסביבת z_0 כך ש z_0 אינו אפס שלהם ומתקיים

$$f(z) = (z - z_0)^m \tilde{f}(z)$$

$$g(z) = (z - z_0)^r \tilde{g}(z)$$

נשים לב ש $\tilde{g}(z)$ לא מתאפסת גם בסביבה של z_0 ולכן $\frac{1}{\tilde{g}(z)}$ אנליטית בסביבה של z_0. כעת,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{m-r} \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$$

כמובן שהפונקציה $\frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$ אנליטית בסביבת z_0 והוא אינו אפס שלה ולכן לפי הגדרה z_0 הוא אפס מסדר $m-r$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$

(ג) אם $m \leq r$ הוכיחו כי z_0 הוא קוטב מסדר $r-m$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$.

פתרון: לפי הנתון, קיימים $\tilde{f}(z), \tilde{g}(z)$ אנליטיות בסביבת z_0 כך ש z_0 אינו אפס שלהם ומתקיים

$$f(z) = (z - z_0)^m \tilde{f}(z)$$

$$g(z) = (z - z_0)^r \tilde{g}(z)$$

נשים לב ש $\tilde{g}(z)$ לא מתאפסת גם בסביבה של z_0 ולכן $\frac{1}{\tilde{g}(z)}$ אנליטית בסביבה של z_0. כעת,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-z_0)^{m-r}\frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^{r-m}}\frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$$

כמובן שהפונקציה $\frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$ אנליטית בסביבת z_0 והוא אינו אפס שלה ולכן לפי הגדרה z_0 הוא קוטב מסדר $r-m$ של $\frac{f(z)}{g(z)}$.

2. מצאו את האפסים של הפונקציות הבאות ומצאו את הסדר שלהם.

(א) $(e^z-1)\sin z\cos z$.

פתרון: ל e^z-1 יש אפס בנקודות $z=2\pi ik$ וזה אפס מסדר 1 כי הנגזרת (שהיא e^z) לא מתאפסת. ל $\sin z$ יש אפס בנקודות $z=\pi k$ וזה אפס מסדר 1 כי הנגזרת $\cos z$ לא מתאפסת בנקודות אלו.

ל $\cos z$ יש אפס בנקודות $\frac{\pi}{2}+\pi k$ ושוב אלו אפסים מסדר 1 כי הנגזרת $-\sin z$ לא מתאפסת בנקודות אלה.

בסך הכל למכפלה יש:

בנקודות $z=2\pi ik$ כאשר $k\neq 0$ יש אפס מסדר 1.

בנקודות $\frac{\pi}{2}k$ כאשר $k\neq 0$ יש אפס מסדר 1.

בנקודה $z=0$ יש אפס מסדר 2.

(ב)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^{z^2}-1}{z} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$$

(הוכיחו גם שהפונקציה אנליטית ב $z_0=0$)

פתרון: האפסים מתקבלים כאשר

$$e^{z^2}=1$$

כלומר כאשר

$$z^2 = 2\pi ik$$

את המקרה $k=0$ נשאיר רגע בצד. כעת, היות שהנגזרת של המונה היא $2ze^{z^2}$ רואים שאף אחד מהאפסים לא מאפס את הנגזרת לכן הם אפסים מסדר 1 של $e^{z^2}-1$ כמו כן אלו לא אפסים של z ולכן בסה"כ כל אלה הם אפסים מסדר 1 של המנה. לגבי הנקודה $z=0$, קודם כל השאלה לא מנוסחת מספיק טוב כי הפונקציה הנוכחית לא מוגדרת בכלל ב $z=0$. הכוונה היא כמובן להשלמה אנליטית של הפונקציה כי זו סינגולריות סליקה. בכל אופן קל לראות שהפיתוח טיילור הוא

$$\frac{e^{z^2}-1}{z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}-1}{z} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}}{z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{n!}$$

קל לראות שפיתוח זה מתחיל ב z^1 ולכן זהו אפס מסדר 1.
לסיכום: האפסים הם ערכי z עבורם $z^2 = 2\pi ik$ והם כולם אפסים מסדר 1.

3. מצאו את כל הפונקציות האנליטיות ב $\{z \mid |z| < 2\}$ המקיימות ש $f(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

פתרון: אנחנו רוצים כמובן להשתמש במשפט היחידות. נסמן $z = 1 - \frac{1}{n}$, כלומר $n = \frac{1}{1-z}$ ונציב זאת באגף ימין:

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = (1-z)^2 - (1-z) = 1 - 2z + z^2 - 1 + z = z^2 - z$$

כלומר,אם נגדיר $g(z) = z^2 - z$ אז יתקיים שלכל $n \in \mathbb{N}$

$$f(1 - \frac{1}{n}) = g(1 - \frac{1}{n})$$

ולכן לפי משפט היחידות

$$f(z) = z^2 - z$$

בכל התחום המדובר.

4. האם קיימת פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)| = |1 - |z||$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

פתרון: נניח שקיימת כזו פונקציה, אז לכל z על מעגל היחידה מתקיים

$$|f(z)| = |1 - |z|| = 0$$

כלומר $f(z) = 0$ על מעגל היחידה, ולפי עקרון היחידות $f(z) = 0$. אבל $f(z)$ לא מקיימת את התנאי שלעיל ולכן אין פונקציות כנ"ל.

5. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של z_0. בנוסף נתון כי ב z_0 יש ל f קוטב מסדר 2 ל g יש אפס מסדר 3, ל $r(z)$ אפס מסדר 2 ול $h(z)$ אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות ב z_0 של:

(א) $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$

פתרון: לפי הנתונים

$$f(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^2} \quad g(x) = (z-z_0)^3\tilde{g}(z)$$

$$r(z) = (z-z_0)^2\tilde{r}(z) \quad h(z) = (z-z_0)\tilde{h}(z)$$

כאשר כל הטילדות אנליטיות ולא מתאפסות ב z_0. כעת,

$$\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)} = \frac{(z-z_0)\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^2\tilde{r}(z) + (z-z_0)\tilde{h}(z)} = \frac{\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z) + \tilde{h}(z)}$$

מה שנשאר אנליטי ב z_0 ולכן z_0 סינגולריות סליקה.

ב) $\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$

פתרון: עם אותם סימונים של הסעיף הקודם

$$\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)} = \frac{\frac{\tilde{f}(z)}{(z-z_0)^2} + (z-z_0)^3\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^2\tilde{r}(z) + (z-z_0)\tilde{h}(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^3}\frac{\tilde{f}(z) + (z-z_0)^5\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z) + \tilde{h}(z)}$$

הפונקציה $\frac{\tilde{f}(z)+(z-z_0)^5\tilde{g}(z)}{(z-z_0)\tilde{r}(z)+\tilde{h}(z)}$ אנליטית ב z_0 ולכן z_0 היא קוטב מסדר 3.

6. תהיינה f, g שתי פונקציות שלמות המקיימות כי $|f(z)| \le |g(z)|$ לכל $z \in \mathbb{C}$. הוכיחו כי

$$f(z) = cg(z)$$

כאשר c קבוע המקיים $|c| \le 1$.

הדרכה: הגדירו כמובן

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

איזה סוג סינגולריות יכול להיות ל $h(z)$? מדוע?

פתרון: נשים לב שאם נגדיר

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

ההגדרה הזאת לא חייבת להיות טובה לכל נקודה כי ייתכן שיש נקודות שבהן $g(z) = 0$. אבל, דבר ראשון, היות שהאפסים של $g(z)$ מבודדים, אנחנו יודעים שכל אפס כזה ייתן לי סינגולריות מבודדת של $h(z)$. כלומר אנחנו יודעים שכל הסינגולריות של $h(z)$ מבודדות. זה כבר משהו. עכשיו נניח ש z_0 הוא אפס של $g(z)$, כלומר הוא נקודת סינגולריות של $h(z)$. אז נסתכל על סביבה U של z_0 שבה $h(z)$ אנליטית. לפי הנתון, לכל $z \in U$ מתקיים

$$|h(z)| = |\frac{f(z)}{g(z)}| \le 1$$

כלומר $h(z)$ חסומה בסביבת z_0. לפי משפט זה אומר ש z_0 היא נקודת סינגולריות סליקה. כלומר אפשר להגדיר פונקציה חדשה

$$\tilde{h}(z_0) = \begin{cases} \frac{f(z_0)}{g(z_0)} & g(z_0) \neq 0 \\ \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} & g(z_0) = 0 \end{cases}$$

ו $\tilde{h}$ היא פונקציה אנליטית, כלומר שלמה. עכשיו היות ש

$$|\frac{f(z)}{g(z)}| \le 1$$

לכל נקודה שבה הוא מוגדר, בוודאי גם

$$|\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}| \le 1$$

ולכן $\tilde{h}$ היא פונקציה שלמה וחסומה ולכן קבועה

$$\tilde{h}(z) = c$$

כאשר כמובן

$$|c| \leq 1$$

לכן קיבלנו שלכל נקודה z_0 שבה $g(z_0) \neq 0$ מתקיים

$$f(z) = cg(z)$$

היות ש f, g רציפות בכל $\mathbb{C}$, נקבל ש

$$f(z) = cg(z)$$

בכל $\mathbb{C}$וזהו.