

# שאלון סגור

בס"ד  
שאלון בחינה בקורס: משוואות דיפרנציאליות רגילות  
מספר הקורס: 83-115-01  
מרצה: דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'  
מתרגלים: זהבית צבי, רואי אסרף  
סמסטר ב', מועד ב': כ"ז אב, התשע"ו (31.08.2016)  
משך הבחינה: שלוש שעות

חומר עזר: 3 דפים חד-צדדיים של A4, מחשבון רגיל (אין להשתמש במחשבון גרפי)

ניקוד: במבחן אפשר לצבור 100 נקודות.

יש לפרט שלבי החישוב. נא לכתוב באופן ברור ומסודר. שאלה מבולגנת ולא מסודרת לא תוכל לזכות במלוא הנקודות.

יש לבחור 5 שאלות מתוך 6. במידה ויופיעו 6 פתרונות, רק חמישה הראשונים ייבדקו.

## בהצלחה!

שאלה 1. (20 נקודות)

א. פתרו את המשוואה  $(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})dx + (\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y})dy = 0$ ;

ב. פתרו את המשוואה  $(x - 2 \sin y + 3)dx + (2x - 4 \sin y - 3) \cos y dy = 0$ . (רמז:

השתמשו בהצבה  $\sin y = z$ .)

שאלה 2. (20 נקודות)

א. שחזרו את המשוואה הדיפרנציאלית שהפתרון שלה הוא

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x$$

ב. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הדיפרנציאלית שאגף שמאל שלה נתון ע"י

$$\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right) e^{4x}$$

שאלה 3. (20 נקודות)

א. למשוואה דיפרנציאלית  $(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0$  יש פתרון מהצורה

$$y(x) = e^{nx}$$

; מצאו את  $n$  ואת הפתרון הכללי של המשוואה;

ב. פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית  $(x+2)^2 y'' - (x+2)y' - 3y = 0$ . כתבו את

הפתרון הכללי ומצאו פתרון פרטי עבור תנאי התחלה  $y(0) = 1, y'(0) = -1$ .

#### שאלה 4. (20 נקודות)

בהינתן המשוואה

$$y' = \frac{2x - y}{1 - x}$$

- א. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה בעזרת טור סביב  $x = 0$  ;
- ב. (4 נקודות) מצאו פתרון של המשוואה המקיים את תנאי ההתחלה  $y(0) = a$  בהתבסס על סעיף א' ;
- ג. מצאו את הפתרון של המשוואה הנתונה בדרך אחרת .

#### שאלה 5. (20 נקודות)

א. פתרו את מערכת המשוואות הנתונה :

$$\begin{cases} 2x'(t) + y'(t) - 4x(t) - y(t) = e^t \\ x'(t) + 3x(t) + y(t) = 0 \end{cases}$$

נוסחאות עזר :

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C, \quad \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

- ב. (5 נקודות) כתבו את המשוואה הבא בעזרת מערכת משוואות מסדר ראשון (אין לפתור את המערכת המתקבלת) :  $y''' - y'' + xy' - y = x^2$

#### שאלה 6. (20 נקודות)

- א. (5 נקודות) מצאו את הפתרון של בעיית התחלה בקטע  $[2, \infty)$  בעזרת התמרת לפלס

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= \delta(t) \\ y(0) = y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

הערה : פתרון לא יעיל יזכה רק בחצי מהנקודות.

- ב. פתרו את בעיית התחלה הבאה בעזרת התמרת לפלס :

$$\begin{cases} y'' + 9y = t + u(t-3)e^t \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

**Table of Laplace Transforms**

| $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$      | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  | $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$     | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  |
|--|---|---------------------------------------|---|
| 1. 1                                   | $\frac{1}{s}$   | 2. $e^{at}$                           | $\frac{1}{s-a}$   |
| 3. $t^n, n=1,2,3,\dots$                | $\frac{n!}{s^{n+1}}$  | 4. $t^p, p > -1$                      | $\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$   |
| 5. $\sqrt{t}$                          | $\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$   | 6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$ | $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$ |
| 7. $\sin(at)$                          | $\frac{a}{s^2+a^2}$   | 8. $\cos(at)$                         | $\frac{s}{s^2+a^2}$   |
| 9. $t \sin(at)$                        | $\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$   | 10. $t \cos(at)$                      | $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$   |
| 11. $\sin(at+b)$                       | $\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$   | 12. $\cos(at+b)$                      | $\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$                                   |
| 13. $e^{at} \sin(bt)$                  | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$   | 14. $e^{at} \cos(bt)$                 | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$   |
| 15. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$        | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$  | 16. $f(ct)$                           | $\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$                                   |
| 17. $u_c(t) = u(t-c)$                  | $\frac{e^{-cs}}{s}$   | 18. $\delta(t-c)$                     | $e^{-cs}$   |
| 19. $u_c(t) f(t-c)$                    | $e^{-cs} F(s)$  | 20. $u_c(t) g(t)$                     | $e^{-cs} \mathcal{L}\{g(t+c)\}$   |
| 21. $e^{ct} f(t)$                      | $F(s-c)$  | 22. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$         | $(-1)^n F^{(n)}(s)$   |
| 23. $\frac{1}{t} f(t)$                 | $\int_s^\infty F(u) du$   | 24. $\int_0^t f(v) dv$                | $\frac{F(s)}{s}$  |
| 25. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$ | $F(s)G(s)$  | 26. $f(t+T) = f(t)$                   | $\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-sT}}$                              |
| 27. $f^{(n)}(t)$                       | $s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$ |                                       |   |