פתרון תרגילים – עקומות, אורך, עקמומיות

1. חשבו את אורכה של כל אחת מהעקומות הבאות הנתונות באמצעות פרמטריזציה (הניחו שהן בעלות אורך):

א. $\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$ כאשר $r>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$

ב. $\gamma(t)=(a(t-\sin t), a(1-\cos t))$ כאשר $a>0$ רדיוס ו- $t\in(0,2\pi)$

ג. $\gamma(t)=(t^2,t^3)$ כאשר $t\in[1,2]$

ד. $\gamma(t)=(e^{kt}\cos t, e^{kt}\sin t)$ כאשר $k>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$

פתרון

א. $\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$ כאשר $r>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$

רכיבי הפרמטריזציה הם פונקציות אלמנטריות לכן גזירות אינסוף פעמים ובפרט פעמיים לכן גזירה ברציפות. הפונקציות $\sin t$ ו- $\cos t$ לא יכולות להתאפס יחד ולכן $\gamma'(t)=(-r\sin t, r\cos t)$ שאינו אפס לכל $t\in[0,2\pi]$

לכן לפי הגדרה העקומה חלקה וניתן לחשב את האורך באמצעות הנוסחה $L=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$,

$t\in[a,b]$.

הווקטור המשיק:

$$\gamma'(t)=(-r\sin t, r\cos t)$$

נחשב את הנורמה (האורך) של הווקטור המשיק:

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}=\sqrt{r^2\underbrace{(\sin^2 t+\cos^2 t)}_{1}}=r$$

לכן:

$$L=\int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|dt=\int_0^{2\pi} r\,dt=rt\Big|_0^{2\pi}=r(2\pi-0)=2\pi r$$

העקומה שחישבנו את אורכה היא מעגל שמרכזו בראשית הצירים $(0,0)$ ורדיוסו r.

ואכן היקף מעגל שווה ל $2\pi r$ לפי נוסחה בתיכון וקיבלנו את הדרוש.

ב. $\gamma(t)=(a(t-\sin t), a(1-\cos t))$ כאשר $a>0$ רדיוס ו- $t\in(0,2\pi)$

רכיבי הפרמטריזציה הם פונקציות אלמנטריות לכן גזירות אינסוף פעמים ובפרט פעמיים לכן גזירה ברציפות. הפונקציות $sint$ ו- $cost$ לא יכולות להתאפס יחד ולכן

$\gamma'(t)=(a(1-cost), asint)$ אינו ווקטור האפס לכל $t\in(0,2\pi)$.

לכן לפי הגדרה העקומה חלקה וניתן לחשב את האורך באמצעות הנוסחה $L=\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$,

$t\in[a,b]$. כאן $t\in(a,b)$, 2 הנקודות לא משפיעות על חישוב האינטגרל.

נגזור ונקבל את הווקטור המשיק:

$$\gamma'(t)=(a(1-cost), asint)$$

נחשב את הנורמה (האורך) של הווקטור המשיק:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2(1-cost)^2 + a^2sin^2t}$$

$$= \sqrt{a^2\left[1 - 2cost + \underbrace{cos^2t + sin^2t}_{=1}\right]} = a\sqrt{2(1-cost)}$$

נשתמש בזהות:

$$cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$$

נעביר אגפים:

$$2sin^2\alpha = 1 - cos2\alpha$$

נציב $\alpha = \frac{t}{2}$ ונקבל:

$$2sin^2\frac{t}{2} = 1 - cost$$

לכן:

$$\|\gamma'(t)\| = a\sqrt{2(1-cost)} = a\sqrt{2\cdot 2sin^2\frac{t}{2}} = a\sqrt{4sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|sin\frac{t}{2}\right|$$

נציב בנוסחת האורך ונקבל:

$$L = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = 2a\int_0^{2\pi} \left|sin\frac{t}{2}\right| dt$$

רוצים להוציא את הערך המוחלט. נשים לב ש- $sin\frac{t}{2}$ בקטע $(0,2\pi)$ חיובית. כאשר $t=0$ נקבל $sin0 = 0$ וכאשר $t = 2\pi$ נקבל $sin\pi = 0$.

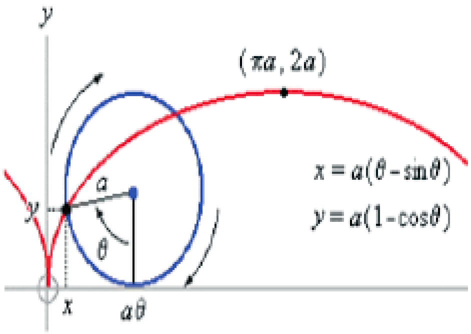
כעת, אם הפונקציה מוגדרת ורציפה בקטע הפתוח (a,b) והגבולות החד-צדדים $\lim_{t\to a^+} f(t)$ ו- $\lim_{t\to b^-} f(t)$ קימים וסופים, אז האינטגרל של f בקטע הפתוח (a,b) שווה לאינטגרל שלה בקטע הסגור $[a,b]$.

לכן, ניתן להוריד את הערך המוחלט ונקבל:

$$L = 2a\int_0^{2\pi}\left|sin\frac{t}{2}\right|dt = 2a\int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}dt = 2a\left(-\frac{cos\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 2a\left(-\frac{cos\pi}{\frac{1}{2}} - \left(-\frac{cos0}{\frac{1}{2}}\right)\right) = 2a\left(-\frac{-1}{\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\right) = 2a(2+2) = 8a$$

העקומה שחישבנו את אורכה כאן נקראת <u>ציקלואידה</u>, והיא מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל ברדיוס a המתגלגל (ללא החלקה) על קו ישר.



קישור לאנימציה של יצירת ציקלואידה:

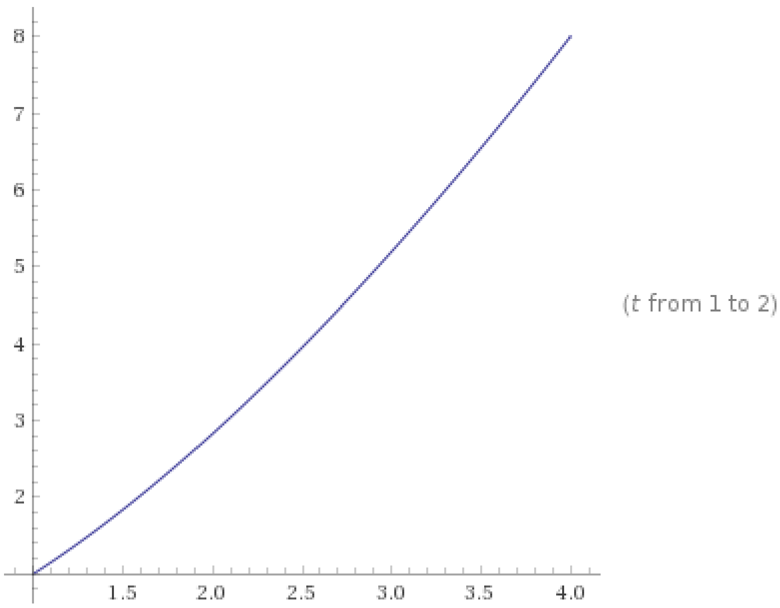
https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%A7%D7%95%D7%91%D7%A5:Cycloid_f.gif

ג. $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ כאשר $t \in [1,2]$

רכיבי הפרמטריזציה הם פולינומים ולכן גזירים אינסוף פעמים ובפרט פעמיים, לכן גזירים ברציפות.

הווקטור $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$ אינו אפס עבור $t \in [1,2]$ ולכן לפי הגדרה העקומה חלקה וניתן לחשב את אורכה באמצעות הנוסחה $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, $t \in [a,b]$.

העקומה:



מכוון ש- $t^3 = (t^2)^{3/2}$ זה גרף של $y = x^{3/2}$.

הווקטור המשיק:

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$$

נחשב את הנורמה (האורך) של הווקטור המשיק:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = \sqrt{t^2(4 + 9t^2)} = t\sqrt{4 + 9t^2}$$

לכן:

נבצע את ההצבה $u = \sqrt{4+9t^2} : t = 1 \to u = \sqrt{13}, t = 2 \to u = \sqrt{40}$ ונקבל:

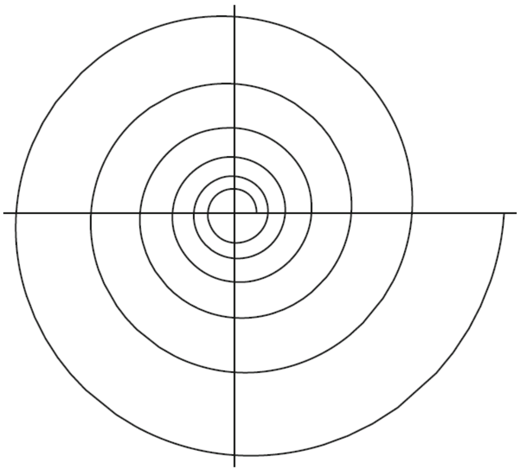
$$\Rightarrow u^2 = 4 + 9t^2 \Rightarrow 2udu = 18tdt \Rightarrow tdt = \frac{1}{9}udu$$

$$L=\int_1^2\|\gamma'(t)\|dt=\int_1^2 t\sqrt{4+9t^2}\,dt=\frac{1}{9}\int_{\sqrt{13}}^{\sqrt{40}}u\cdot \underbrace{u\,du}_{u^2}=\frac{1}{9}\frac{u^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{13}}^{\sqrt{40}}=\frac{1}{27}\left[\left(\sqrt{40}\right)^3-\left(\sqrt{13}\right)^3\right]$$

ד. $\gamma(t)=\left(e^{kt}\cos t,e^{kt}\sin t\right)$ כאשר $k>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$

זו עקומה הנקראת ספירלה לוגריתמית.

העקומה:



רכיבי הפרמטריזציה הם פונקציות אלמנטריות לכן גזירות אינסוף פעמים ובפרט פעמיים לכן גזירה ברציפות. הפונקציות $\sin t$ ו- $\cos t$ לא יכולות להתאפס יחד ונתון גם $k>0$ ולכן $\gamma'(t)=\left(ke^{kt}\cos t-e^{kt}\sin t,ke^{kt}\sin t+e^{kt}\cos t\right)$ שאינו אפס לכל $t\in[0,2\pi]$, כוון שהרכיב הראשון של $\gamma'(t)$ אינו מתאפס, הרי

$$ke^{kt}\cos t-e^{kt}\sin t=0\Rightarrow k\cos t-\sin t=0\Rightarrow \tan t=k\Rightarrow t=\arctan k+\pi n$$

שונה מאפס כי $k>0$,

$$k=0\Leftrightarrow \arctan k=0$$

לכן לפי הגדרה העקומה חלקה ולכן ניתן לחשב את האורך באמצעות הנוסחה $L=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$,

$t\in[a,b]$.

הווקטור המשיק:

$$\gamma'(t)=\left(ke^{kt}\cos t-e^{kt}\sin t,ke^{kt}\sin t+e^{kt}\cos t\right)=\left(e^{kt}(k\cos t-\sin t),e^{kt}(k\sin t+\cos t)\right)$$

נחשב את הנורמה (האורך) של הווקטור המשיק:

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\left[e^{kt}(k\cos t-\sin t)\right]^2+\left[e^{kt}(k\sin t+\cos t)\right]^2}=\sqrt{\left(e^{kt}\right)^2(k\cos t-\sin t)^2+\left(e^{kt}\right)^2(k\sin t+\cos t)^2}$$

$$=\sqrt{\left(e^{kt}\right)^2\left[(k\cos t-\sin t)^2+(k\sin t+\cos t)^2\right]}$$

$$=e^{kt}\sqrt{k^2\cos^2 t\cancel{-2k\cos t\sin t}+\sin^2 t+k^2\sin^2 t\cancel{+2k\sin t\cos t}+\cos^2 t}=e^{kt}\sqrt{k^2\left(\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{=1}\right)+\left(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{=1}\right)}$$

$$=e^{kt}\sqrt{k^2+1}$$

קיבלנו:

$$\|\gamma'(t)\|=e^{kt}\sqrt{k^2+1}$$

לכן:

$$L=\int_0^{2\pi}\left\|\gamma'(t)\right\|dt=\int_0^{2\pi}e^{kt}\overbrace{\sqrt{k^2+1}}^{const}dt=\sqrt{k^2+1}\,\frac{e^{kt}}{k}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}\left(e^{2\pi k}-1\right)$$

2. מצאו פרמטריזציה טבעית לעקומות הבאות:

א. $\gamma(t)=(1+2\cos t,-3+2\sin t)$

ב. $\gamma(t)=(r\cos t,r\sin t)$ כאשר $r>0$

<u>פתרון</u>

א. $\gamma(t)=(1+2\cos t,-3+2\sin t)$

רכיבי הפרמטריזציה הם פונקציות אלמנטריות לכן גזירות אינסוף פעמים ובפרט פעמיים לכן גזירה ברציפות. הפונקציות $\sin t$ ו- $\cos t$ לא יכולות להתאפס יחד. לכן $\gamma'(t)=(-2\sin t,2\cos t)$ שונה מאפס לכל t וניתן לחשב פרמטריזציה טבעית לפי הנוסחה.

הווקטור המשיק:

$$\gamma'(t)=(-2\sin t,2\cos t)$$

$$\left\|\gamma'(t)\right\|=\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}=\sqrt{4\left(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{=1}\right)}=2$$

לכן:

$$s(t)=\int_0^t\left\|\gamma'(x)\right\|dx=\int_0^t 2\,dx=2x\Big|_0^t=2t$$

להביע את t באמצעות s ונקבל:

$$t(s)=\frac{s}{2}$$

זהו הפרמטר הטבעי.
נציב ונקבל את הפרמטריזציה הטבעית:

$$\gamma(s)=\gamma(t(s))=\left(1+2\cos\left(\frac{s}{2}\right),-3+2\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)$$

ניתן לבדוק שאכן מקבלים $\left\|\gamma'(s)\right\|=1$.

ב. $\gamma(t)=(r\cos t,r\sin t)$

רכיבי הפרמטריזציה הם פונקציות אלמנטריות לכן גזירות אינסוף פעמים ובפרט פעמים לכן גזירה ברציפות. הפונקציות $\sin t$ ו- $\cos t$ לא יכולות להתאפס יחד ולכן $\gamma'(t)=(-r\sin t,r\cos t)$ שאינו אפס לכל t ולכן ניתן לחשב פרמטריזציה טבעית לפי הנוסחה $s(t)=\int_0^t\left\|\gamma'(x)\right\|dx$.

הווקטור המשיק:

$$\gamma'(t)=(-r\sin t,r\cos t)$$

נחשב את הנורמה (האורך) של הווקטור המשיק:

$$\left\|\gamma'(t)\right\|=\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}=\sqrt{r^2\underbrace{\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}_{1}}=r$$

אם $r=1$ מקבלים $\left\|\gamma'(t)\right\|=1$ וזו פרמטריזציה טבעית ו- $s=t$.

אם $r\neq 1$ זו פרמטריזציה שאינה טבעית.

נגדיר:

$$s=\int_0^t\left\|\gamma'(x)\right\|dx=\int_0^t r\,dx=rx\Big|_0^t=rt$$

נכתוב את t באמצעות s כלומר $t(s)$:

$$t(s)=\frac{s}{r}$$

נציב ונקבל פרמטריזציה טבעית:

$$\gamma(s)=\gamma(t(s))=\gamma\left(\frac{s}{r}\right)=\left(r\cos\frac{s}{r},r\sin\frac{s}{r}\right)$$

נבדוק:

הווקטור המשיק הוא:

$$\gamma'(s)=\left(\cancel{r}\left(-\sin\frac{s}{r}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{r}},\cancel{r}\cos\frac{s}{r}\cdot\frac{1}{\cancel{r}}\right)=\left(-\sin\frac{s}{r},\cos\frac{s}{r}\right)$$

ואכן:

$$\left\|\gamma'(s)\right\|=\sqrt{\sin^2\frac{s}{r}+\cos^2\frac{s}{r}}=1$$

אכן פרמטריזציה טבעית.

3. חשבו את העקמומיות של העקומות הבאות:

א. $\gamma(t)=(1+2\cos t,-3+2\sin t)$

ב. אליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ג. פרבולה חצי קובייתית: $x^3-y^2=0$

ד. $\gamma(t)=(r\cos t,r\sin t)$ כאשר $r>0$

ו. $\gamma(t)=\left(t^2,t^3\right)$ כאשר $t\in[1,2]$

ז. $\gamma(t)=\left(e^{kt}\cos t,e^{kt}\sin t\right)$ כאשר $k>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$

<u>פתרון</u>

א. $\gamma(t)=(1+2\cos t,-3+2\sin t)$

נשים לב כי הפרמטריזציה היא:

$$x(t)=1+2\cos t\Rightarrow x-1=2\cos t$$

$$y(t)=-3+2\sin t\Rightarrow y+3=2\sin t$$

לכן, נעלה בריבוע, נחבר ונקבל:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=(2\cos t)^2+(2\sin t)^2=4$$

לכן הפרמטריזציה מתארת מעגל מוזז שמרכזו בנקודה $(1,-3)$ ורדיוסו 2.
תחילה נבדוק האם הפרמטריזציה הנתונה היא טבעית בכדי שנדע באיזו נוסחת עקמומיות להשתמש.
בכדי להראות פרמטריזציה טבעית צריך להראות ש-

$$\|\gamma'(t)\| = 1$$

נחשב זאת:

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} \underset{\sin^2 t+\cos^2 t=1}{=} \sqrt{4} = 2 \neq 1$$

לכן הפרמטריזציה אינה טבעית.

נחשב את העקמומיות לפי הנוסחה:

$$\kappa = \frac{\det\begin{pmatrix} \overrightarrow{\gamma'(t)} & \overrightarrow{\gamma''(t)} \end{pmatrix}}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

קיבלנו קודם:

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

נגזור שוב ונקבל:

$$\gamma''(t) = (-2\cos t, -2\sin t)$$

נציב בנוסחה עבור העקמומיות ונקבל:

$$\kappa = \frac{\det\begin{pmatrix} -2\sin t & -2\cos t \\ 2\cos t & -2\sin t \end{pmatrix}}{\|2\|^3} = \frac{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}{8} \underset{\sin^2 t+\cos^2 t=1}{=} \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ב. אליפסה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
בסעיף זה נשתמש בהגדרה סתומה של העקומה.
ניתן גם לעשות פרמטריזציה לאליפסה ולהמשיך לפי דרך בסעיף א'. (ראינו פרמטריזציה בהרצאה).

נגדיר: $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

נשתמש בנוסחת בייטמן לחישוב הערך המוחלט של העקמומיות:

$$|\kappa| = \frac{\left|F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\right)^3}$$

נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$F_x = \frac{2x}{a^2}, \; F_y = \frac{2y}{b^2}$$

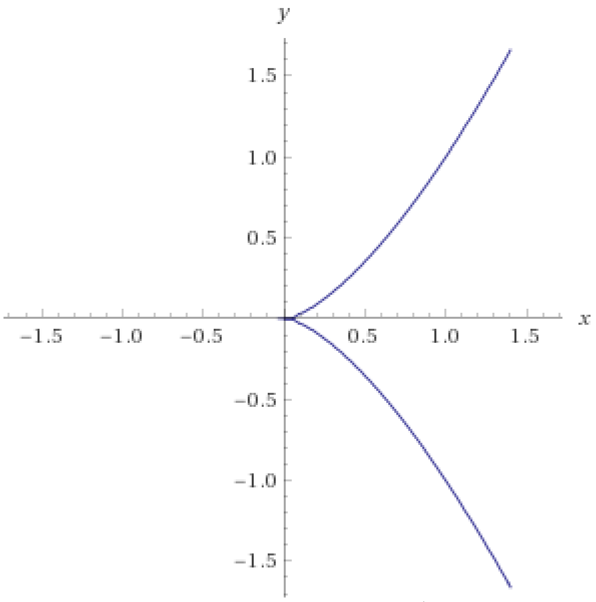
$$F_{xx} = \frac{2}{a^2}, \; F_{xy} = 0, \; F_{yy} = \frac{2}{b^2}$$

נציב בנוסחה ונקבל:

$$|\kappa|=\frac{\left|\frac{2}{a^2}\cdot\left(\frac{2y}{b^2}\right)^2-\cancel{2\cdot 0\cdot F_xF_y}+\frac{2}{b^2}\cdot\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2\right|}{\left(\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{b^2}\right)^2}\right)^3}=\frac{\left|\frac{2}{a^2}\cdot\frac{4y^2}{b^4}+\frac{2}{b^2}\cdot\frac{4x^2}{a^4}\right|}{\left(\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{b^2}\right)^2}\right)^3}=\frac{\frac{8}{a^2b^2}\underbrace{\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)}_{=1}}{\left(\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}}\right)^3}$$

$$=\frac{\frac{8}{a^2b^2}}{\left(2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}\right)^3}=\frac{\cancel{8}}{\cancel{8}a^2b^2\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}\right)^3}=\frac{1}{a^2b^2\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}\right)^3}$$

ג. פרבולה חצי קובייתית: $x^3-y^2=0$
העקומה:



בסעיף זה נשתמש בהגדרה סתומה של העקומה.

נגדיר: $F(x,y)=x^3-y^2=0$

נשתמש בנוסחת בייטמן לחישוב הערך המוחלט של העקמומיות:

$$|\kappa|=\frac{\left|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2+F_y^2}\right)^3}$$

נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$F_x=3x^2\ ,\ F_y=-2y$$

$$F_{xx}=6x\ ,\ F_{xy}=0\ ,\ F_{yy}=-2$$

נציב בנוסחה ונקבל:

$$|\kappa| = \frac{\left|6x\cdot(-2y)^2 - \cancel{2\cdot 0\cdot F_x F_y} - 2\cdot\left(3x^2\right)^2\right|}{\left(\sqrt{\left(3x^2\right)^2+(-2y)^2}\right)^3} = \frac{\left|24xy^2-18x^4\right|}{\left(\sqrt{9x^4+4y^2}\right)^3}$$

ד. בתרגיל הקודם ראינו פרמטריזציה טבעית למעגל:

$$\gamma(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

לכן נחשב את העקמומיות לפי הנוסחה:

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$$

נגזור פעמים את הפרמטריזציה:

$$\gamma'(s) = \left(\cancel{r}\left(-\sin\frac{s}{r}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{r}}, \cancel{r}\cos\frac{s}{r}\cdot\frac{1}{\cancel{r}}\right) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right)$$

$$\gamma''(s) = \left(\left(-\cos\frac{s}{r}\right)\cdot\frac{1}{r}, \left(-\sin\frac{s}{r}\right)\cdot\frac{1}{r}\right) = \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right)$$

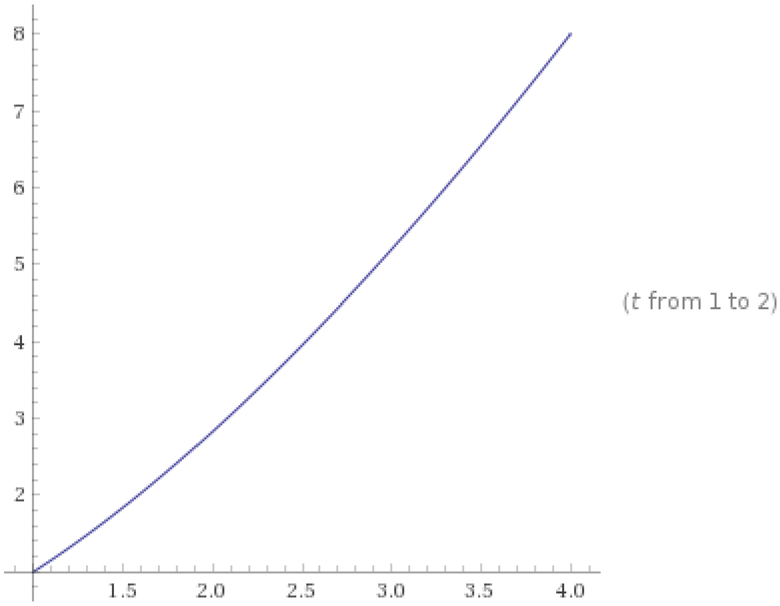
לכן העקמומיות היא:

$$\|\gamma''(s)\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\right)^2 + \left(-\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{r^2}\cos^2\frac{s}{r} + \frac{1}{r^2}\sin^2\frac{s}{r}} = \frac{1}{r}$$

וקיבלנו תשובה בדיוק כמו שהגדרנו עקמומיות כיחס הפוך של הרדיוס.

ו. $\gamma(t) = \left(t^2, t^3\right)$ כאשר $t\in[1,2]$

בתרגיל קודם ראינו שהעקומה היא הגרף של $y = x^{3/2}$ והאיור שלה הוא:



ראינו גם שזו עקומה חלקה ומצאנו וקטור משיק ואת אורכו:

$$\gamma'(t) = \left(2t, 3t^2\right)$$

$$\|\gamma'(t)\| = t\sqrt{4+9t^2}$$

כוון ש-$\|\gamma'(t)\| \neq 1$ הפרמטריזציה אינה טבעית ולכן נחשב את העקמומיות שלה לפי הנוסחה:

$$\kappa=\frac{\det\begin{pmatrix} \overrightarrow{\gamma'(t)} & \overrightarrow{\gamma''(t)} \end{pmatrix}}{\left\|\gamma'(t)\right\|^3}$$

נקבל:

$$\gamma''(t)=(2,6t)$$

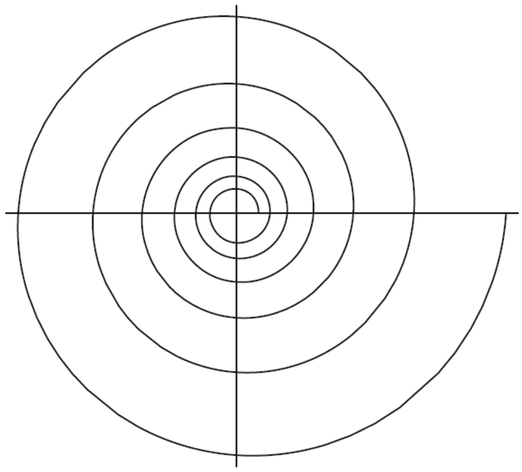
נציב בנוסחה עבור העקמומיות ונקבל:

$$\kappa=\frac{\det\begin{pmatrix} 2t & 2 \\ 3t^2 & 6t \end{pmatrix}}{\left(t\sqrt{4+9t^2}\right)^3}=\frac{12t^2-6t^2}{\left(t\sqrt{4+9t^2}\right)^3}=\frac{6\cancel{t^2}}{\cancel{t^3}_{t^{3-2}}\sqrt{\left(4+9t^2\right)^3}}=\frac{6}{t\sqrt{\left(4+9t^2\right)^3}}$$

ז. $\gamma(t)=\left(e^{kt}\cos t, e^{kt}\sin t\right)$ כאשר $k>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$

זו ספירלה לוגריתמית שראינו בתרגיל קודם.

האיור שלה:



ראינו גם שזו עקומה חלקה ומצאנו ווקטור משיק ואת אורכו:

$$\gamma'(t)=\left(e^{kt}(k\cos t-\sin t), e^{kt}(k\sin t+\cos t)\right)$$

$$\left\|\gamma'(t)\right\|=e^{kt}\sqrt{k^2+1}$$

כוון ש- $\left\|\gamma'(t)\right\|\neq 1$ הפרמטריזציה אינה טבעית ולכן נחשב את העקמומיות שלה לפי הנוסחה:

$$\kappa=\frac{\det\begin{pmatrix} \overrightarrow{\gamma'(t)} & \overrightarrow{\gamma''(t)} \end{pmatrix}}{\left\|\gamma'(t)\right\|^3}$$

נקבל:

$$\gamma''(t)=\left(ke^{kt}(k\cos t-\sin t)+e^{kt}(-k\sin t-\cos t), ke^{kt}(k\sin t+\cos t)+e^{kt}(k\cos t-\sin t)\right)$$

$$\gamma''(t)=\left(e^{kt}\left(k^2\cos t-k\sin t-k\sin t-\cos t\right), e^{kt}\left(k^2\sin t+k\cos t+k\cos t-\sin t\right)\right)$$

$$\gamma''(t)=\left(e^{kt}\left[\left(k^2-1\right)\cos t-\left(k+1\right)\sin t\right],e^{kt}\left[\left(k^2-1\right)\sin t+\left(k+1\right)\cos t\right]\right)$$

נציב בנוסחה עבור העקמומיות ונקבל:

$$\kappa=\frac{\det\begin{pmatrix} e^{kt}\left(k\cos t-\sin t\right) & e^{kt}\left[\left(k^2-1\right)\cos t-\left(k+1\right)\sin t\right] \\ e^{kt}\left(k\sin t+\cos t\right) & e^{kt}\left[\left(k^2-1\right)\sin t+\left(k+1\right)\cos t\right]\end{pmatrix}}{\left(e^{kt}\sqrt{k^2+1}\right)^3}$$

$$\kappa=\frac{\cancel{e^{2kt}}\left\{\left(k\cos t-\sin t\right)\left[\left(k^2-1\right)\sin t+\left(k+1\right)\cos t\right]-\left(k\sin t+\cos t\right)\left[\left(k^2-1\right)\cos t-\left(k+1\right)\sin t\right]\right\}}{e^{3kt-2kt}\sqrt{\left(k^2+1\right)^3}}$$

$$\Rightarrow\kappa=\frac{\cancel{\left(k^3-k\right)\cos t\sin t}+\left(k^2+k\right)\cos^2 t-\left(k^2-1\right)\sin^2 t\cancel{-\left(k+1\right)\cos t\sin t}}{e^{kt}\sqrt{\left(k^2+1\right)^3}}$$

$$-\frac{\cancel{\left(k^3-k\right)\sin t\cos t}-\left(k^2+k\right)\sin^2 t+\left(k^2-1\right)\cos^2 t\cancel{-\left(k+1\right)\cos t\sin t}}{e^{kt}\sqrt{\left(k^2+1\right)^3}}$$

$$\Rightarrow\kappa=\frac{\left(k^2+k\right)\left(\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{1}\right)-\left(k^2-1\right)\left(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1}\right)}{e^{kt}\sqrt{\left(k^2+1\right)^3}}=\frac{\left(k^2+k\right)-\left(k^2-1\right)}{e^{kt}\sqrt{\left(k^2+1\right)^3}}=\frac{k+1}{e^{kt}\sqrt{\left(k^2+1\right)^3}}$$