מד"ח בחורף תרגיל 4

1)
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = A e^{\alpha x + \beta t}, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = x, & -\infty \le x \le \infty \\ u_t(x,0) = \sin(x) & -\infty \le x \le \infty \end{cases}$$

$$u = v(x,t) + w(x,t)$$

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, & -\infty \le x \le \infty,\ t \ge 0 \\ v(x,0) = x = f(x) & \text{נסמן} \\ v_t(x,0) = \sin(x) = g(x) & \text{נסמן} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = A e^{\alpha x + \beta t} \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

נמצא את v נעזר בנוסחת ד'אלמבר

$$v(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

$$v(x,t) = \frac{x - \cancel{ct} + x + \cancel{ct}}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin(s)\,ds = x - \frac{1}{2c}\Big[\cos(s)\Big|_{s=x-ct}^{s=x+ct}$$

$$= x - \frac{1}{2c}\left[\cos(x+ct) - \cos(x-ct)\right] =$$

$$= x - \frac{1}{\cancel{2}c}\cdot\left[-\cancel{2}\sin\left(\frac{x + \cancel{ct} + x - \cancel{ct}}{2}\right)\sin\left(\frac{\cancel{x} + ct - \cancel{x} + ct}{2}\right)\right] =$$

$$v(x,t) = x + \frac{1}{c}\sin(x)\sin(ct)$$

כעת נמצא את $w(x,t)$, נעזר ברמז.

נחפש $w(x,t) = B(t)\, e^{\alpha x + \beta t}$.

נציב במד"ח ש- w מקיימת.

$$w_t = B'(t)e^{\alpha x+\beta t} + B(t)e^{\alpha x+\beta t}\cdot\beta$$

$$w_{tt} = B''(t)e^{\alpha x+\beta t} + \beta B'(t)e^{\alpha x+\beta t} + B'(t)e^{\alpha x+\beta t}\cdot\beta$$

$$+\beta^2 B(t)e^{\alpha x+\beta t} = e^{\alpha x+\beta t}[B''(t)+2\beta B'(t)+\beta^2 B(t)]$$

$$w_x = \alpha B(t)e^{\alpha x+\beta t} \quad , \quad w_{xx} = \alpha^2 B(t)e^{\alpha x+\beta t}$$

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = Ae^{\alpha x+\beta t}$$

$$e^{\alpha x+\beta t}[B''(t)+2\beta B'(t)+\beta^2 B(t)] - c^2\alpha^2 B(t)e^{\alpha x+\beta t} =$$

$$= e^{\alpha x+\beta t}[B''(t)+2\beta B'(t)+\beta^2 B(t)-c^2\alpha^2 B(t)].$$

לכן

$$e^{\alpha x+\beta t}[B''(t)+2\beta B'(t)+\beta^2 B(t)-c^2\alpha^2 B(t)] = Ae^{\alpha x+\beta t}$$

$$e^{\alpha x+\beta t}[B''(t)+2\beta B'(t)+(\beta^2-c^2\alpha^2)\cdot B(t)] = Ae^{\alpha x+\beta t}$$

אם $\beta^2-c^2\alpha^2\neq 0$ נקבל מהשוואת מקדמים:

$$\cdot\; B(t) = \frac{A}{\beta^2-c^2\alpha^2}$$

אם $\beta^2-c^2\alpha^2=0$ אז:

$$B''(t)+2\beta B' = A$$

$$B(t) = B^h(t) + B^p(t)$$

$$B^{h''}(t) + 2\beta B^{h'} = 0$$

$$k^2 + 2\beta k = 0$$

$$k(k+2\beta) = 0 \qquad k=0 \text{ או } k=-2\beta$$

$$B^h(t) = C_1 e^{0t} + C_2 e^{-2\beta t} = C_1 + C_2 e^{-2\beta t}$$

כעת עבור $B^p(t)$, צד ימין של המד"ר A

נעבוד בשיטת המקדמים הלא ידועים: $B^p(t) = t^S D$

כאשר $S=\{0,1,2\}$ הוא המינימלי כך ש- $B^p(t)$ לא מוכל בפתרון הכללי של ההומוגני.

$S=0$ לא מקיים כיוון ששם $B^p(t)=D$ והוא מוכל בפתרון ההומוגני. כי D זה קבוע שנמצא בתוך $B^h(t)$.

$S=1$ $B^p(t) = Dt$ לא מוכל בהומוגני, לכן $S=1$ מינימלי.

נציב את B^p במד"ר: $B^{p''}(t) + 2\beta B^{p'}(t) = A$

$$0 + 2\beta \cdot D = A \quad |:2\beta \neq 0 \qquad \beta \neq 0 \text{ כי נתון}$$

$$\boxed{D = \frac{A}{2\beta}}$$

$\Leftarrow$ $B^p(t) = \frac{A}{2\beta} t$.

$$B(t) = C_1 + C_2 e^{-2\beta t} + \frac{A}{2\beta} t$$

נמצא את C_1 ו- C_2 ולצורך כך נעזר בתנאי ההתחלה של W.

$$\begin{cases} W(x,0) = 0 \\ W_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad W(x,t) = B(t) e^{\alpha x + \beta t}$$

$$0 = W(x,0) = B(0) \underbrace{e^{\alpha x}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow B(0) = 0$$

$$W_t(x,t) = B'(t) e^{\alpha x + \beta t} + \beta e^{\alpha x + \beta t} \cdot B(t) = e^{\alpha x + \beta t} \cdot [B'(t) + \beta B(t)]$$

$$0 = W_t(x,0) = \underbrace{e^{\alpha x}}_{\neq 0} \cdot [B'(0) + \beta B(0)] = 0 \Rightarrow B'(0) + \beta B(0) = 0$$

אבל $\begin{cases} B(0) = 0 \\ \beta \neq 0 \end{cases}$ ולכן $B'(0) = 0$.

$$\begin{cases} B(t) = c_1 + c_2 e^{-2\beta t} + \frac{A}{2\beta} t \\ B(0)=0 \\ B'(0)=0 \end{cases}$$

$$0 = B(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

$$B'(t) = -2\beta c_2 e^{-2\beta t} + \frac{A}{2\beta}$$

$$B'(0) = -2\beta c_2 + \frac{A}{2\beta} = 0$$

$$2\beta c_2 = \frac{A}{2\beta} \quad | : 2\beta \neq 0$$

$$\boxed{c_2 = \frac{A}{4\beta^2}}$$

$$c_1 = -c_2 = -\frac{A}{4\beta^2}$$

$$B(t) = -\frac{A}{4\beta^2} + \frac{A}{4\beta^2} e^{-2\beta t} + \frac{A}{2\beta} t \Leftarrow$$

<u>אש״ל</u>

$$W(x,t) = B(t) e^{\alpha x + \beta t}$$

$$B(t) = \begin{cases} \frac{A}{\beta^2 - c^2\alpha^2} & , \ \beta^2 - c^2\alpha^2 \neq 0 \text{ כאשר} \\ -\frac{A}{4\beta^2} + \frac{A}{4\beta^2} e^{-2\beta t} + \frac{A}{2\beta} t & , \ \beta^2 - c^2\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

$$u = v + w$$

$$v = x + \frac{\sin(x) \cdot \sin(ct)}{c} \quad \text{כאשר}$$

(2) בעקבות פיצוץ נוצר גל הדף המקיים את המשוואה.

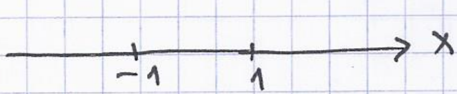
$$p_{tt} - 16p_{xx} = 0 \qquad -\infty \le x \le \infty \qquad t \ge 0$$

$$p(x,0) = \begin{cases} 10 , & |x| \le 1 \\ 0 , & |x| \ge 1 \end{cases} = f(x)$$

$$p_t(x,0) = \begin{cases} 1 , & |x| \le 1 \\ 0 , & |x| \ge 1 \end{cases} = g(x)$$

בנקודה $x_0=10$ נמצא מבנה נקודתי. המהנדס שתכנן את המבנה קבע שהמבנה יעמוד בלחצים המקיימים $p \le 6$. מצאו את t_0 בו הלחץ במבנה כתוצאה מהפיצוץ, הוא מקסימלי. האם המבנה יתמוטט?

פתרון: $c^2=16 \Leftarrow c=4$.



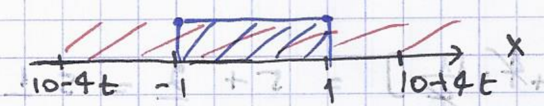
$x_0 = 10$

$10-4t \quad , \quad 10+4t$

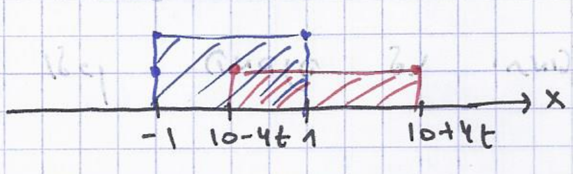
כאשר $t>0$, $10+4t>10 \Leftarrow 10+4t>1$ לכן אפשרויות א

המקרים הרלוונטיים הם:

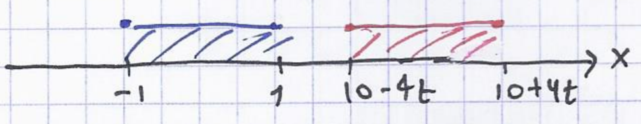
א)



ב)



ג)



מקרה א: $10+4t>1$, $10-4t<-1$ לכן $f(10-4t)=0$, $f(10+4t)=0$

$$p(x,t) = \frac{0+0}{2} + \frac{1}{8}\int_{10-4t}^{10+4t} 1\, ds = \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} 1\, ds = \frac{1}{4} < 6 .$$

מקרה ג: $10+4t > 1$ וגם $10-4t > 1$. ולכן $f(10-4t)=0$, $f(10+4t)=0$

$$p(x,t) = 0 < 6$$

מקרה ב: $-1 \le 10-4t \le 1 < 10+4t$

$$10+4t, \quad \forall t>0 \Rightarrow 10+4t > 1 \Rightarrow f(10+4t)=0$$

$$10-4t \le 1 \Rightarrow f(10-4t) = 10$$

לפי נוסחת דלאמבר:

$$p(x,t) = \frac{10+0}{2} + \frac{1}{8}\int_{10-4t}^{10+4t} g(s)ds = 5 + \frac{1}{8}\int_{10-4t}^{1} 1\, ds$$

האינטגרל יהיה מקסימלי כאשר הגבול התחתון יתלכד עם מינוס אחד. כלומר כאשר $10-4t=-1$

$$4t = 11$$

$$\boxed{t = \frac{11}{4}}$$

$$p(x,t) = 5 + \frac{1}{8}[1-(10-4t)] = 5 + \frac{1}{8}[-9+4t]$$

$$p\left(10, \frac{11}{4}\right) = 5 + \frac{1}{8}\cdot\left[-9+\cancel{4}\cdot\frac{11}{\cancel{4}}\right] = 5 + \frac{2}{8} = 5\frac{1}{4} < 6$$

ולכן המבנה לא יתמוטט.

3

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 , & 0 \le x < \infty , \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) , & 0 \le x < \infty \\ u_t(x,0) = g(x) , & 0 \le x < \infty \\ u_x(0,t) = 0 ; & t \ge 0 \end{cases}$$

ת. התחלה

ת. שפה

ראשית: אכן נראה כי תנאי התואמות מתקיים: (תנאי תואמות אומר שאין סתירה בין תנאי ההתחלה ותנאי השפה).

נתבונן ת. התחלה $u(x,0)=f(x)$ אם נגזור אותו לפי x ונציב $x=0$ נקבל $u_x(0,0)=f'_+(0)$.

נתבונן בתנאי שפה אם נציב $t=0$ נקבל $u_x(0,0)=0$ לכן $f'_+(0)=0$.

נתבונן בתנאי התחלה $u_t(x,0)=g(x)$ אם נגזור לפי x ונציב אחכ $x=0$ נקבל $u_{tx}(0,0)=g'_+(0)$.

אם את התנאי שפה נגזור לפי t ונציב $t=0$ נקבל:

$$u_{xt}(0,0)=0$$

מכיוון ש- $u \in C^2$ $u_{xt}=u_{tx}$ $\Leftarrow$ לכן $g'_+(0)=0$.

לכן תנאי התואמות אכן מתקיים: $f'_+(0)=g'_+(0)=0$

כמו כן כדי ש- $u \in C^2[0,\infty)$ דרוש ש- $f \in C^2([0,\infty))$ ו- $g \in C^1([0,\infty))$ זה נובע ישירות מנוסחת ד'למבר.

כעת נעזר ברמז ונגדיר ל- f הרחבה זוגית

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) , & 0 \le x < \infty \\ f(-x) , & -\infty < x \le 0 \end{cases}$$

וכמו כן הרחבה זוגית ל- g.

$$\tilde{g} = \begin{cases} g(x) , & 0 \le x < \infty \\ g(-x) , & -\infty < x \le 0 \end{cases}$$

כעת ניתן להשתמש בנוסחת ד'אלמבר

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & , -\infty < x < \infty \quad t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \tilde{f}(x) & , \quad -\infty < x < \infty \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{g}(x) & , -\infty < x < \infty \end{cases}$$

$c = 1$

$$u(x,t) = \frac{\tilde{f}(x-t) + \tilde{f}(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{g}(s)\,ds$$

מקרה I:

$x - t < x + t < 0$

$x-t \quad x+t \quad 0$

$$u(x,t) = \frac{f(-(x-t)) + f(-(x+t))}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(-s)\,ds$$

$$u(x,t) = \frac{f(t-x) + f(-x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(-s)\,ds$$

מקרה I לא רלוונטי כיוון שאנו מעוניינים בפתרון שנמצא ברבע המישור $0<x$, $t>0$.

מקרה II: $x-t < 0 < x+t$

$x-t \quad 0 \quad x+t$

$$u(x,t) = \frac{\tilde{f}(x-t) + \tilde{f}(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{g}(s)\,ds$$

כיוון ש- $x-t<0 \Leftarrow$ $\tilde{f}(x-t)$ תהפוך $f(-(x-t))$

$x+t \geq 0 \Leftarrow$ $\tilde{f}(x+t)$ תהפוך $f(x+t)$

מקרה II המשך:

$$u(x,t)=\frac{f(t-x)+f(x+t)}{2}+\frac{1}{2}\left[\int_{x-t}^{0}\tilde{g}(s)\,ds+\int_{0}^{x+t}\tilde{g}(s)\,ds\right]$$

כיוון ש- $x-t<0$ $\tilde{g}(s)$ תחליף $g(-s)$.

וגם $x+t>0$ —״— —״— $g(s)$.

$$u(x,t)=\frac{f(t-x)+f(x+t)}{2}+\frac{1}{2}\left[\int_{x-t}^{0}g(-s)\,ds+\int_{0}^{x+t}g(s)\,ds\right]$$

מקרה III: $0<x-t<x+t$.

$\Leftarrow$ $x-t>0$ $\Leftarrow$ $\tilde{f}(x-t)$ תחליף $f(x-t)$.

$x+t>0$ $\Leftarrow$ $\tilde{f}(x+t)$ תחליף $f(x+t)$.

כמו כן $x-t>0$ לכן $\tilde{g}(s)$ תחליף $g(s)$.

כך $x+t>0$ לכן $\tilde{g}(s)$ תחליף $g(s)$.

$$u(x,t)=\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(s)\,ds.$$

סיכום:

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{f(t-x)+f(x+t)}{2}+\dfrac{1}{2}\left[\displaystyle\int_{x-t}^{0}g(-s)\,ds+\int_{0}^{x+t}g(s)\,ds\right], & x-t<0<x+t\\[2ex] \dfrac{f(x-t)+f(x+t)}{2}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}g(s)\,ds, & 0<x-t<x+t.\end{cases}$$

4) פתור את בעיית קושי (הלא-הומוגנית) הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = e^{-x} + e^{x} & , -\infty < x < \infty \ , \quad t>0 \\ u(x,0) = x^2 = f(x) & , -\infty \le x \le \infty \\ u_t(x,0) = \cos x = g(x) & , -\infty \le x \le \infty \end{cases}$$

$c = 3 \Leftarrow c^2 = 9$ פתרון לפי נוסחת ד'אלמבר המורחבת:

א)

$$u(x,t) = \frac{f(x+3t)+f(x-3t)}{2} + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} g(s)\,ds + \frac{1}{6}\int_0^t \int_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$$F(\xi,\tau) = e^{-\xi} + e^{\xi} = 2\cosh(\xi)$$ כאשר

$$u(x,t) = \frac{(x+3t)^2 + (x-3t)^2}{2} + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} \cos(s)\,ds + \frac{1}{6}\int_0^t \int_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)} 2\cosh(\xi)\,d\xi\,d\tau$$

$$= \frac{x^2 + \cancel{6xt} + 9t^2 + x^2 - \cancel{6xt} + 9t^2}{2} + \frac{1}{6}\left[\sin(s)\Big|_{x-3t}^{x+3t}\right] + \frac{1}{3}\int_0^t \left[\sinh(\xi)\Big|_{\xi = x-3(t-\tau)}^{x = x+3(t-\tau)}\right] d\tau$$

$$= x^2 + 9t^2 + \frac{1}{6}\left[\sin(x+3t) - \sin(x-3t)\right] + \frac{1}{3}\int_0^t \left(\sinh(x+3(t-\tau)) - \sinh(x-3(t-\tau))\right) d\tau$$

$$= x^2 + 9t^2 + \frac{1}{\cancel{6}\,3}\left[\cancel{2}\sin\left(\frac{\cancel{x}+3t-\cancel{x}+3t}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\cancel{3t}+x-\cancel{3t}}{2}\right)\right] +$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{\cosh(x+3(t-\tau))}{-3} - \frac{\cosh(x-3(t-\tau))}{3}\right]\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= x^2 + 9t^2 + \frac{1}{3}\sin(3t)\cos(x) - \frac{1}{9}\left[\cosh(x+3(t-\tau)) + \cosh(x-3(t-\tau))\right]\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$= x^2 + 9t^2 + \frac{1}{3}\sin(3t)\cos x - \frac{1}{9}\left[2\cosh(x) - (\cosh(x+3t) + \cosh(x-3t))\right]$$

$$u(x,t) = x^2 + 9t^2 + \frac{1}{3}\sin(3t)\cos x - \frac{2}{9}\cosh(x)$$

$$+ \frac{1}{9}\left[\cosh(x+3t) + \cosh(x-3t)\right]$$

ב) נשים לב ש-

$$u(-x,t) = (-x)^2 + 9t^2 + \frac{1}{3}\sin(3t)\cos(-x) - \frac{2}{9}\cosh(-x)$$

$$+ \frac{1}{9}\left[\cosh(-x+3t) + \cosh(-x-3t)\right] =$$

$$= x^2 + 9t^2 + \frac{1}{3}\sin(3t)\cos(x) - \frac{2}{9}\cosh(x) + \frac{1}{9}\cosh(x-3t)$$

$$+ \frac{1}{9}\cosh(x+3t) = u(x,t)$$

כלומר, אם f,g זוגיות ולכל $t\geq 0$ $F(x,t)$ זוגית

לפי x אז הפתרון בעיית קושי (כלומר $u(x,t)$) יהיה גם זוגי

תנאי ההתחלה היא סך זוגיות של x!

(כמו כן למרות שבה לא נדרש אם $F(x,t)$ אי-זוגית לפי x

ו- f,g אי-זוגיות אז הפתרון לבעיית קושי

כלומר $u(x,t)$ יהיה אי-זוגי)