פתרון תרגיל 1 - טופולוגיה

**שאלה 1**

1. הוכחה באינדוקציה- הטענה טריויאלית עבור בסיס האינדוקציה .נניח נכונות עבור  נקבל מאי שוויון המשולש ומהנחת האינדוקציה ש:ולכן הטענה נכונה עבור .
2. שקול להוכיח .

מאי שוויון המשולש נקבל  באופן דומה (תוך שימוש בתכונת הסימטריות בנוסף) נקבל: ולכן גם .

**שאלה 2**

כל התכונות פרט לאי שוויון המשולש טריוויאליות. נראה ש- ותכונה זו גוררת כמובן את אי שוויון המשולש.

אם  אז מתקיים  והטענה ברורה. אם  אז  ושוב הטענה ברורה. אם  שוב ניתן להראות בצורה דומה שהטענה נכונה.

נניח אם כן ש.

נניח בשלילה ש. אזי  וגם . נסמן . מאי השוויון  נקבל ש ומכאן . כעת,  ולכן . באופן דומה מראים מאי השוויון השני ש ומכיון ש מסיקים ש. אבל אז נקבל בסה"כ ש בסתירה לכך ש.

**שאלה 3**

סימטריות: מ"ל שלכל מתקיים  (למה?).

כדי להוכיח זאת נציב  בתנאי השני ונקבל . מהתנאי הראשון  ומכאן  כדרוש.

ניתן להיעזר כעת בסימטריות ובתנאי השני כשמחליפים את התפקידים של  ו- (מותר לעשות זאת כי התנאי השני מתקיים לכל ) כדי לקבל את אי שוויון המשולש בנוסח .

אי שליליות:נראה שלכל  מתקיים . ניתן להציב בתנאי השני . נקבל כעת . מהתנאי הראשון  ולכן . מכאן  כדרוש.

**שאלה 4**

1. לא מטריקה. למשל מתקיים  אבל .
2. לא מטריקה. למשל מתקיים  אבל .
3. זוהי אכן מטריקה. מאי שליליות של המטריקה  נקבל את אי שליליות של  ובנוסף:.

מכיון ש  מטריקה נקבל ש.

בסה"כ . הסימטריות של  נובעת בצורה ברורה מהסימטריות של .

אי שוויון המשולש: . מאי שוויון המשולש של  נקבל:  וכן . לכן,

**שאלה 5**

תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה p-adic באופן הבא: עבור  ראשוני מגדירים מטריקה על -  
 , עבור .

1. הוכיחו ש.
2. תארו את הכדור  במרחב .
3. עבור  מצאו דוגמה לסדרה לא קבועה במרחב  המתכנסת ל-.

**פתרון**

1. .
2.  ולכן  ולכן  ומכאן  ולכן הכדור הוא .
3. למשל:  שכן מתקיים .

**שאלה 6**

יהיו  ו-  ויהיו  כדורים פתוחים שחיתוכם אינו ריק. תהי , ו - 

הוכיחו ש- .

**פתרון**

טענת עזר:

תהי  ונניח שמתקיים , אזי .   
הוכחת טענת עזר:

יהי  אזי .  ולכן .   
הערה: אכן מתקיים  שכן .

מש"ל טענת עזר.

כעת, יהי  . מהעובדה ש- ומטענת העזר נובע ש- (הציבו ). באופן דומה נקבל .

**שאלה 7**

הגדרה: תהי  סדרה במרחב מטרי כלשהו . נאמר שהסדרה היא "קבועה לבסוף" אם קיים  כך שקיים  עבורו לכל  מתקיים .

1. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי, כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.
2. הוכיחו כי סדרה מתכנסת במרחב מטרי **דיסקרטי** אם ורק אם היא קבועה לבסוף.

**פתרון**

**א.** נניח ש קבועה לבסוף אזי קיימים , כך שלכל  מתקיים . נראה שהסדרה  מתכנסת ל. יהי  אזי לכל  מתקיים .

**ב.** מספיק להוכיח (עפ"י סעיף א') שכל סדרה מתכנסת במ"מ דיסקרטי היא קבועה לבסוף.

נניח במ"מ דיסקרטי, אזי קיים  כך שלכל  מתקיים ; אך זה אומר בהכרח שלכל  (המרחקים האפשרים הם רק 0 או 1). מכאן  לכל.

**שאלה 8**

במרחב  הראו שהסדרה  מתכנסת, ומצאו את גבולה.

**פתרון**

הגבול הוא . הוכחה: מתקיים  (מדוע?).

**שאלה 9**

1. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: יהי  מרחב מטרי, ויהי  תת מרחב מטרי שלו. תהי  ו- . אזי  אמ"מ .

נתבונן במרחב  כאשר  הוא קבוצת המספרים האי-רציונאליים, ו-  היא המטריקה הסטנדרטית המושרית מ-. נגדיר את הסדרה הבאה: .

1. הוכיחו שהסדרה .
2. הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת בתת המרחב המטרי .

**פתרון**

1. שימו לב שלכל  מתקיים  ולכן  אמ"מ אמ"מ  אמ"מ.
2. נניח בשלילה שקיים  כך ש- רציונאלי. אזי קיימים  שלמים כך ש-. לאחר כפל בהצלבה מקבלים  ולכן , בסתירה לכך ש- הוא אי-רציונאלי.
3. נניח בשלילה שהסדרה מתכנסת בתת המרחב, כלומר .לכן (לפי סעיף א') היא מתכנסת ב-. קל לראות ש- . מיחידות הגבול במרחב מטרי נקבל  וזו סתירה.

**שאלת אתגר**

הראו שאם  מרחב נורמי ו-  המטריקה המושרה מהנורמה אזי **לא** קיימים כדורים **שונים** כאשר  ו .

**פתרון**

נניח  וכן  ונניח בשלילה ש אזי  ולכן . יהי  (שימו לבאם היינו ב המשמעות הגיאומטרית היתה חיבור של הוקטור  לוקטור עם נורמה  בכיוון של ) מתקיים: 

לכן  אבל  שכן: .

הערה :  ולכן בהכרח  ומכאן שהביטוי  מוגדר.קיבלנו סתירה להנחה.