תרגול 3 – אדם צ'פמן

שאלה:

נמצאים בכד 3 כדורים אדומים, 4 לבנים ו2 שחורים. מוציאים מהכד כל פעם כדור וחזירים אותו לכד. מה הסיכוי שהפעם הראשונה שיצא כדור אדום תקרה לפני הפעם הראשונה שיצא כדור לבן?

תשובה:

נביט בכדור הראשון שיוצא שאינו שחור. אם כך, מרחב המדגם מצטמצם לבחירת כדור אחד מתוך 3 אדומים ו4 שחורים. אי-לכך, הסיכוי שיצא כדור אדום בפעם הזאת הוא $\frac{3}{7}$.

שאלה:

מטילים 5 פעמים מטבע הוגן. כל פעם שהתקבל ראש, הכניסו כדור לבן לכד, וכשהתקבל פלי, הכניסו כדור שחור.

א. מה הסיכוי שיש בכד רק כדורים לבנים?
ב. ענה שוב על סעיף א' בהינתן שלאחר מכן הוצאו חמישה כדורים, עם החזרה, כך שכולם יצאו לבנים.

תשובה:

בלי תנאים, הסיכוי שיש בכד רק כדורים לבנים הוא הסיכוי שבחמש ההטלות התקבל ראש, כלומר $\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}$.

נסמן את A בתור המאורע שבו יש בכד רק כדורים לבנים. נסמן בB את המאורע שבו הוצאו חמישה כדורים עם החזרה וכולם יצאו לבנים. אנו מעוניינים בערך $P(A|B)$. כעת, $P(A|B)=P(B|A)\cdot\frac{P(A)}{P(B)}$. $P(A)=\frac{1}{32}$. בנוסף $P(B|A)=1$. נותר אם כך לחשב את $P(B)$. זאת נעשה בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה. נסמן A_i את הסיכוי שיש בכד i כדורים לבנים (אז $A=A_5$). ידוע כי $P(B)=P(B|A_0)P(A_0)+\cdots+P(B|A_5)P(A_5)$. הסיכוי להוציא כדור אחד לבן כאשר יש i כדורים בכד הוא $\frac{i}{5}$, ולכן הסיכוי להוציא עם החזרה חמישה לבנים הוא $\left(\frac{i}{5}\right)^5$, כלומר $P(B|A_i)=\left(\frac{i}{5}\right)^5$. מצד שני, הסיכוי שיש בכד i כדורים לבנים הוא $\frac{\binom{5}{i}}{32}$, דהיינו $P(A_i)=\frac{\binom{5}{i}}{32}$. אז מקבלים $P(B)=\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{i}{5}\right)^5\cdot\frac{\binom{5}{i}}{32}$. לכן $P(A|B)=\frac{1}{\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{i}{5}\right)^5\cdot\binom{5}{i}}$.

שאלה:

בכד נמצאים n כדורים, שמתוכם k שחורים והשאר לבנים.

א. שני משקיפים בלתי-תלויים צופים בכדור המוצא מן הכד. הסיכוי של כל אחד מהם לומר אמת הוא 0.1. הוצא כדור מקרי מהכד. שני המשקיפים דווחו "לבן". מה הסיכוי שהכדור אכן לבן?

ב. נניח עכשיו $n = 2k$. מוציאים עכשיו N כדורים אם החזרה. נסמן בA את המאורע שבו יצאו כדורים משני הצבעים ובB את המאורע שבו יצא לכל היותר כדור שחור אחד. מצא את N שעבורו A וB בלתי-תלויים.

תשובה:

נסמן בA את המאורע שבו הראשון מדווח לבן ובB את המאורע שבו השני מדווח לבן. נסמן בC את המאורע שבו הכדור שיצא באמת לבן. ברצונינו לחשב $P(C|A \cap B)$. לפי חוק בייס $P(C|A \cap B) = P(A \cap B|C) \cdot \frac{P(C)}{P(A \cap B)}$.

הסיכוי ששניהם ידווחו "לבן" כאשר הכדור באמת לבן הוא $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$. הסיכוי שהכדור שיצא לבן הוא $\frac{n-k}{n}$. נחשב את $P(A \cap B)$ בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה. $P(A \cap B) = P(A \cap B|C) \cdot P(C) + P(A \cap B|C^c) \cdot P(C^c)$.

הסיכוי ששניהם מדווחים "לבן" כאשר הכדור שיצא הוא שחור הוא $\frac{81}{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^2$. הסיכוי שהכדור שחור הוא $\frac{k}{n}$. לכן $P(A \cap B) = \frac{n-k}{100n} + \frac{81k}{100n} = \frac{n+80k}{100n}$. אי-לכך, $P(C|A \cap B) = \frac{1}{100} \cdot \frac{100n}{n+80k} \cdot \frac{n-k}{n} = \frac{n-k}{n+80k}$.

בסעיף ב', $P(A) = 1 - \frac{2}{2^N} = 1 - \frac{1}{2^{N-1}}$ ו$P(B) = \frac{1}{2^N} + \frac{N}{2^N} = \frac{N+1}{2^N}$. כעת, $P(A \cap B)$ הוא הסיכוי שיצא בדיוק שחור אחד, כלומר $\frac{N}{2^N}$. כדי שהמאורעות יהיו בלתי-תלויים, צריך להתקיים

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{N}{2^N} = \left(1 - \frac{1}{2^{N-1}}\right) \cdot \frac{N+1}{2^N}$$

$$N = \left(1 - \frac{1}{2^{N-1}}\right) \cdot (N+1)$$

$$N = N + 1 - \frac{N+1}{2^{N-1}}$$

$$\frac{N+1}{2^{N-1}} = 1$$

הפונקציה $f(x) = \frac{x+1}{2^{x-1}}$ יורדת עבור $x > 1$. האסטרטגיה אם כך תהיה להציב מספרים שלמים בפונקציה עד שנפגע ב1. זה קורה כאשר $x = 3$. לכן $N = 3$ זו התוצאה.

שאלה:

קיימת מחלה איומה ונוראה בשם "גחלת". ידוע שאחוז אחד מהאנשים לוקים בה. ישנה בדיקה רפואית שאומרת לחולה אם הוא לוקה במחלה. הבדיקה נותנת תשובה נכונה ב90% מהמקרים. מה הסיכוי שחולה שקיבל תשובה חיובית אכן חולה בגחלת?

תשובה:

נסמן בA את המאורע שבו החולה אכן חולה במחלה ובB את המאורע שבו הוא מקבל תשובה חיובית. ברצוננו לחשב את $P(A|B)$. לפי נוסחת בייס $P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$. הסיכוי שהחולה מקבל תשובה חיובית בהינתן שהוא באמת חולה בגחלת הוא 0.9. הסיכוי של נבדק שרירותי להיות באמת חולה הוא 0.01. נחשב את $P(B)$ לפי נוסחת ההסתברות השלמה $P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)$. הסיכוי של נבדק לקבל תשובה חיובית אם איננו חולה הוא 0.1. הסיכוי שנבדק אקראי איננו חולה הוא 0.99. לכן

$$P(B) = 0.9 \cdot 0.01 + 0.1 \cdot 0.99 = 0.108$$

אי-לכך

$$P(A|B) = 0.9 \cdot \frac{0.01}{0.108} = 0.083$$

כלומר שמונה אחוזים ושליש אחוז. לא הרבה...

שאלה:

נתונות שלוש מעטפות, ששתיים מהן מכילות תשלום חשבונות ואחת מכילה צ'ק בסך עשרת אלפים ₪ לפירעון מידי. נועה איננה יודעת מי מהמעטפות מכילה את הצ'ק, אך שותפתה רינה יודעת. לנועה יש הזדמנות לנחש במי מהמעטפות הצ'ק, ואם היא מנחשת נכונה, אז היא זוכה בו. אחרת, היא משלמת את החשבונות.

א. מה הסיכוי שנועה תנחש נכון בהנחה שאין לה שום מידע נוסף?
ב. רינה נותנת לנועה לבחור מעטפה, אך מחליטה לאפשר לה להחליף את הבחירה שלה. מתוך שתי המעטפות הנותרות, היא שמה בצד מעטפה אחת שמכילה חשבון לתשלום. האם לנועה כדאי להחליף את המעטפה שבידה עם המעטפה הנותרת?

תשובה:

כמובן שאם אין לנועה מידע נוסף, אז סיכויה לנחש נכונה את המעטפה עם הצ'ק הוא $\frac{1}{3}$.

אם נועה בחרה נכון, שזה בסיכוי של $\frac{1}{3}$ אז המעטפה הנותרת מכילה חשבון לתשלום בסבירות 1. אם נועה בחרה לא נכון, שזה בסיכוי $\frac{2}{3}$ אז המעטפה הנותרת מכילה את הצ'ק בסבירות 1. בקיצור, הסיכוי שהצ'ק נמצא במעטפה הנותרת הינו $\frac{2}{3}$ ולכן כדאי לה להחליף את המעטפה.

שאלה:

ישנו מטבע לא הוגן, שנותן פלי בהסתברות p ועץ בהסתברות $1-p$. שני חברים רוצים להשתמש בהטלת המטבע לצורך החלטה גורלית של קניית בירה לחבר'ה. אולם, המטבע כאמור איננו הוגן. הציעו אסטרטגיה הוגנת לשימוש בהטלת המטבע.

תשובה:

החברים מטילים כל פעם את המטבע פעמיים ברצף. אם יוצא בפעם הראשונה עץ ובפעם השנייה פלי, החבר הראשון זוכה. אם יוצר בפעם הראשונה פלי ובפעם השנייה עת אז החבר השני זוכה. אחרת, חוזרים שוב על הטלה כפולה של המטבע. מכיוון שבהטלה כפולה, הסיכוי לפלי-עץ שווה לסיכוי לעץ-פלי, בפעם הראשונה שלא תתקבלנה התוצאות עץ-עץ או פלי-פלי, הסבירות שחבר א' יזכה שווה לסבירות שחבר ב' יזכה.