מבוא לחוגים ומודולים – שיעורי בית 1

ליאור פולק

22 במרץ 2017

1 תרגיל

(רענון הגדרות). נבדוק אלו תכונות נשמרות תחת תת–חוגים.

יהי R חוג בלי יחידה, ויהי $S \subseteq R$ תת–חוג בלי–יחידה. הוכיחו או הפריכו:

1. אם R עם יחידה, האם S עם יחידה? ולהפך?
2. אם R חילופי, האם S חילופי? ולהפך?
3. אם R תחום, האם S תחום? ולהפך?
4. אם איבר x הפיך ב־R, האם הוא הפיך ב־S? ולהפך?

פתרון.

1. אם R עם יחידה, S לא חייב להיות בעל יחידה. ראינו דוגמה לכך בהרצאה עם מטריצות, אבל דוגמה יותר פשוטה היא עם החוג $\mathbb{Z}$ ותת–החוג בלי–יחידה $2\mathbb{Z}$.
2. יהי $S \subseteq R$ תת–חוג בלי–יחידה. יהיו $a, b \in S$. לכן $a \cdot b = b \cdot a$. אזי $a, b \in R$ ומשכך $a \cdot b = b \cdot a$. לכיוון השני, תת–החוג $span\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ של $M_2(\mathbb{R})$ הוא חילופי, אבל $M_2(\mathbb{R})$ איננו חילופי.
3. יהי $S \subseteq R$ תת–חוג בלי–יחידה. יהיו $a, b \in S$ כך ש–$a \cdot b = 0$. אזי מכאן נובע ש–$a = 0$ או $b = 0$ (כמשוואה ב–R). לכן גם S תחום. לכיוון השני, תת–החוג $span\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ של $M_2(\mathbb{R})$ הוא חוג עם חילוק (כל מטריצה אלכסונית היא הפיכה למעט 0) ולכן בפרט תחום, אבל $M_2(\mathbb{R})$ איננו תחום שכן יש בו מחלקי אפס, לדוגמה $\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.
4. הטריק כאן הוא להבין שיש לנו בעייתיות עם איבר היחידה. ניקח את $\mathbb{Z}_6$ ואת $3\mathbb{Z}_6 = \{0, 3\} \cong \mathbb{Z}_2$. 3 הוא אידמפוטנט בחוג זה (ובפרט הפיך), אבל 3 איננו הפיך ב–$\mathbb{Z}_6$.
   לכיוון השני, בחוג הרציונליים $\mathbb{Q}$, $2 \in \mathbb{Q}$ הפיך; בתת–החוג $\mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Z}$ איננו הפיך שכן $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

■

2 תרגיל

יהיו R,S חוגים בלי יחידה. נגדיר את המכפלה הישרה $R\times S$ עם הפעולות רכיב־רכיב.

1. הוכיחו כי $R\times S$ חוג בלי יחידה, ושאם R,S הם חוגים (עם יחידה), אז גם $R\times S$.
2. הגדירו את המכפלה $\prod\limits_{i\in I} R_i$ למשפחה $\{R_i\}_{i\in I}$ של חוגים בלי יחידה, והוכיחו שאם R_i חילופי לכל $i\in I$, אז גם $\prod\limits_{i\in I} R_i$ חילופי.

פתרון.

1. נוכיח כי זהו חוג בלי יחידה.

() .

i. נתבונן על החבורה $R\times S$ ביחס לפעולת החיבור ואיבר האפס $(0_R,0_S)$. ממבוא לחבורות אנו יודעים שמכפלה קרטזית של חבורות עם הפעולות רכיב רכיב (ואיבר אפס רכיב רכיב) היא חבורה. גם האבליות נשמרת במכפלה קרטזית.

ii. נתבונן על $R\times S$ עם הכפל רכיב רכיב. זוהי חבורה למחצה שכן לכל $r,r'\in R\ ,\ s,s'\in S$:

$$(r,s)\cdot(r',s')=(rr',ss')\in R\times S$$

שכן R,S חבורות–למחצה.
לכן זהו חוג בלי יחידה.
אם ב–R,S יש איברי יחידה $1_R,1_S$, אזי $(1_R,1_S)$ הוא איבר יחידה של החוג $R\times S$:

$$(1_R,1_S)\cdot(r,s)=(1_R\cdot r,1_S\cdot s)=(r,s)=(r\cdot 1_R,s\cdot 1_S)=(r,s)\cdot(1_R,1_S)$$

2. תהי משפחה $\{R_i\}_{i\in I}$ של חוגים בלי יחידה.
נגדיר את המכפלה הקרטזית $\prod\limits_{i\in I} R_i$ כך: כל הפונקציות $f:I\to\bigcup\limits_{i\in I} R_i$ כאשר $f(i)\in R_i$.
הכפל יהיה מוגדר כך: $f\cdot s=g:I\to\bigcup\limits_{i\in I} R_i$ כך ש–$(f\cdot s)(i)=g(i)=f(i)\cdot s(i)$.
אם R_i חילופי לכל $i\in I$, אז גם $\prod\limits_{i\in I} R_i$ חילופי. יהיו $f,s\in\prod\limits_{i\in I} R_i$. אזי:

$$(f\cdot s)(i)=f(i)\cdot s(i)=s(i)\cdot f(i)=(s\cdot f)(i)$$

■

3 תרגיל

יהי R חוג חילופי, ויהיו $x,y\in R$. הוכיחו שאם xy הפיך, אז גם x וגם y הפיכים. הפריכו זאת במקרה הלא חילופי (רמז: מטריצות).

פתרון.

יהי R חוג חילופי, ויהיו $x,y\in R$. אם xy הפיך אזי יש $a\in R$ כך ש- $a\left(xy\right)=\left(xy\right)a=1$. הכפל הוא אסוציאטיבי, ולכן $\left(ax\right)y=x\left(ya\right)=1$. החוג חילופי ולכן ניתן גם לרשום $y\left(ax\right)=\left(ya\right)x=\left(ax\right)y=x\left(ya\right)=1$ שזה שקול לכך ש- x,y הפיכים.

במקרה הלא חילופי נפריך עם דוגמה מהתרגול. יהי $\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}$. אזי נסתכל על חוג האנדומורפיזמים מעליו ביחס לחיבור וכפל.

נסתכל על ההעתקות $D\left(\left(a_1,a_2,a_3,\ldots\right)\right)=\left(a_2,a_3,\ldots\right)$ ו- $U\left(\left(a_1,a_2,a_3,\ldots\right)\right)=\left(0,a_1,a_2,a_3,\ldots\right)$.

אזי $D\circ U=id$ אבל $U\circ D\neq id$.

יתרה מכך- D הפיכה מימין אבל לא יכולה להיות הפיכה משמאל, שכן היא איננה חח"ע.

■

4 תרגיל

יהי R תחום. הוכיחו $\left(R\left[x\right]\right)^{\times}=R^{\times}$. כלומר לא מקבלים איברים הפיכים "חדשים" בחוג הפולינומים.

פתרון.

יהי $r\in R^{\times}$. אזי יש $r'\in R$ (ולמעשה $r'\in R^{\times}$ שכן גם הוא הפיך, עם r) כך ש- $r\cdot r'=r'\cdot r=1$. כעת $r'\in R\left[x\right]$ כפולינום. לכן גם $r\in\left(R\left[x\right]\right)^{\times}$.

לכיוון השני, נוכיח שפולינום לא יכול להיות הפיך.

יש לנו שני מקרים לפולינום הפיך- ההופכי הוא פולינום, או ההופכי הוא איבר בתחום.

1. למקרה הראשון, נתבונן ב-

$$r\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}r_ix^i,\ r'\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}r'_ix^i$$

כאשר $n,k>0$ הן המעלות הגבוהות ביותר שאינן מתאפסות של הפולינומים, ובפרט $r_n\neq0,r'_k\neq0$.

נתבונן בחזקה $n+k$ של הפולינום $r\cdot r'$. המקדם של חזקה זו הוא $r_nr'_k$. זהו איננו 0 שכן R הוא תחום, ובתחום אין מחלקי אפס.

לכן גם המכפלה היא פולינום, מדרגה $n+k$. לכן מכפלת הפולינומים "האמיתיים" תמיד איננה איבר בתחום, אלא גם פולינום.

לכן הופכי של פולינום לא יכול להיות פולינום.

2. למקרה השני, אם ההופכי של פולינום הוא איבר בתחום, נסמן:

$$r\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}r_ix^i,\quad r'=r\left(x\right)^{-1}$$

ולכן:

$$r\left(x\right)\cdot r'=\sum_{i=0}^{n}r_i\cdot r'x^i=1\Rightarrow r_n\cdot r'=0$$

ומכך שהנחנו $r_n\neq0$ נקבל $r'=0$ בסתירה להופכיות. לכן גם איבר בתחום לא יכול להיות ההופכי של פולינום. לכן פולינום איננו הפיך.

לא נותר לנו אלא להסיק כי האיברים ההפיכים היחידים ב- $R\left[x\right]$ (ז"א שייכים ל- $\left(R\left[x\right]\right)^{\times}$) הם מהצורה $r\in R$, ואז הם שייכים גם ל- $R^{\times}$.

■

5 תרגיל

הוכיחו או הפריכו האם האובייקטים הבאים הם חוגים. במקרה שהם כן, האם הם תחומים?

1. $R = \left\{ \frac{m}{2n+1} \middle| m, n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}$ עם חיבור וכפל רגילים.
2. $R = \left\{ \frac{2n+1}{m} \middle| n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}$ עם חיבור וכפל רגילים.
3. $R = (\mathrm{End}(G), +, \circ)$ כאשר $(G, +, 0)$ היא חבורה אבלית, $\mathrm{End}(G)$ הוא אוסף האנדומורפיזמים של G (הומומורפיזמים מ־G לעצמה), הפעולה $+$ ב־R היא חיבור פונקציות המושרה מהפעולה של G והפעולה $\circ$ היא הרכבה. רמז: R הוא חוג.
4. $R = (C[0,1], +, \circ)$ כאשר $C[0,1]$ הוא אוסף הפונקציות הממשיות הרציפות בקטע $[0,1]$, הפעולה $+$ היא חיבור פונקציות והפעולה $\circ$ היא הרכבה.
5. $R = (C[0,1], +, \cdot)$ כאשר הפעולה $\cdot$ היא כפל פונקציות, כלומר $f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$.

פתרון

1. נוכיח. $0, 1 \in R$, ע"י $m = 0$, ו־$m = n = -1$. לגבי חיבור:

$$\frac{m}{2n+1} + \frac{a}{2b+1} = \frac{m \cdot (2b+1) + a(2n+1)}{(2n+1)(2b+1)} = \frac{2(an+bm) + a + m}{2(2bn+b+n)+1} = \frac{l}{2k+1} \in R$$

לגבי כפל:

$$\frac{m}{2n+1} \cdot \frac{a}{2b+1} = \frac{am}{2(2bn+b+n)+1} = \frac{l}{2k+1} \in R$$

ולכן יש לנו חוג עם יחידה. החוג קומוטטיבי שכן $\mathbb{Q}$ קומוטטיבי. כעת אם $a, b \in R$ ומתקיים $ab = 0$ אזי משוואה זו בפרט נכונה ב־$\mathbb{Q}$.
אבל $\mathbb{Q}$ הוא שדה ובשדה אין מחלקי אפס. לכן $a = 0$ או $b = 0$. לכן R הוא תחום, ולמעשה הוא תחום שלמות.
הוא איננו חוג עם חילוק שכן $2 \in R$ אבל $\frac{1}{2} \notin R$.

2. R איננו מכיל את איבר האפס ולכן הוא אפילו איננו תת־חבורה חיבורית של $\mathbb{Q}$, וברור שאיננו תת־חוג.

3. נוכיח ש־R חוג ביחס לפעולות הנתונות. איבר ה־0 הוא ההומומורפיזם הטריוויאלי ואיבר היחידה הוא אוטומורפיזם הזהות.
יהיו $a, b \in R$. אזי ברור ש־$a+b$, $a \cdot b = a \circ b$ מוגדרים היטב ואנדומורפיזמים של G. $(\mathrm{End}(G), +)$ אבלית שכן $(G, +)$ אבלית.
לכל איבר a יש נגדי $-a$. $a + 0 = 0 + a = a$ לפי כך ש־$0(x) = 0$.
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ לפי כך ש־$1(x) = x$. לכן זהו חוג חילופי עם יחידה.
זהו איננו תחום בהכרח. יהי $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. אזי נסתכל על חוג האנדומורפיזמים מעליו ביחס לחיבור וכפל.
נסתכל על ההעתקות $\pi_1((a,b)) = (a,0)$ ו־$\pi_2((a,b)) = (0,b)$.
אזי $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$ אבל $\pi_1 \neq 0, \pi_2 \neq 0$.

4. נפריך. ניקח $f = 1$ הפונקציה הקבועה. אזי $f \circ (f+f) = 1 \neq 2 = f \circ f + f \circ f$.

5. נוכיח. איבר האפס הוא פונקציית האפס ואיבר היחידה הוא פונקציית הזהות. יש דיסטריבוטיביות של הכפל מעל החיבור לפי תכונות של מספרים.
יהיו $a, b \in R$. אזי ברור ש־$a+b$, $a \cdot b$ מוגדרים היטב ופונקציות ממשיות רציפות בקטע $[0,1]$ לפי אינפי.
$a + b = b + a$ לפי קומוטטיביות החיבור מעל הממשיים. לכן זהו חוג עם יחידה.
זהו איננו תחום, שכן ניקח את הפונקציות:

$$f = \begin{cases} 0 & x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad g = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{4} \\ 4 - 12x & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \leq x \end{cases}$$

ומכפלת הפונקציות האלו היא 0 בכל מקום.

6 תרגיל

יהי R חוג בלי יחידה.

1. נאמר כי R בוליאני אם לכל איבר $x \in R$ מתקיים $x = x^2$. הוכיחו שאם R בוליאני, אז הוא חילופי.
2. רשות: הוכיחו שאם לכל $x \in R$ מתקיים $x = x^3$, אז R הוא חילופי.
3. הערה (ג'ייקובסון, 1945): אם לכל $x \in R$ קיים מספר שלם $n(x) > 1$ כך ש- $x^{n(x)} = 1$, אז R הוא חילופי.

פתרון.

1. יהיו $a, b \in R$. אזי:

$$a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + b + ab + ba \Rightarrow 0 = ab + ba$$

$$ab = ab + ab + ba$$

אבל:

$$x + x = (x + x)^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x + x + x \Rightarrow x + x = 0$$

נציב זהות זאת במשוואה $ab = ab + ab + ba$ לקבלת:

$$ab = 0 + ba = ba$$

והחוג חילופי.