89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 13

<u>תרגיל (מועד ב' תשע"ג)</u>

פונקציה בוליאנית היא פונקציה שהפלט שלה הוא ביט בודד, כלומר נלקח מהקבוצה {0,1}.

א. מה מספר הפונקציות הבוליאניות השונות האפשריות אשר הקלט שלהן הוא בן n ביטים?
כלומר, מה מספר הפונקציות $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$?

ב. פונקציה נקראת דואלית אם לכל קלט $x \in \{0,1\}^n$ מתקיימת התכונה $f(x) = f(\bar{x})$.
(כאשר $\bar{x}$ מסמל את המספר המתקבל מ x על ידי היפוך כל ביט. לדוגמא $1101 = \overline{0010}$).
מה מספר הפונקציות הבוליאניות הדואליות השונות האפשריות אשר הקלט שלהן הוא בן n ביטים?

ג. פונקציה נקראת מאוזנת אם עבור בדיוק חצי מהקלטים הפלט הוא 0, ולחצי מהקלטים יש פלט 1.
(לדוגמא, פונקציית ה XOR היא מאוזנת.)
מה מספר הפונקציות הבוליאניות המאוזנות השונות האפשריות אשר הקלט שלהן הוא בן n ביטים?

ד. פונקציה נקראת סימטרית אם ערך הפלט שלה תלוי רק במספר ביטי הקלט ששווים ל-1, ולא במיקומם.
(לדוגמא, פונקציה סימטרית f תקיים $f(001) = f(010) = f(100)$. דוגמא אחרת היא פונקציית ה-AND על 3 ביטים, שהיא סימטרית והפלט שלה הוא 1 אם ורק אם מספר הביטים בקלט ששווים ל-1 הוא 3.)
מה מספר הפונקציות הבוליאניות הסימטריות השונות האפשריות אשר הקלט שלהן הוא בן n ביטים?

<u>פתרון</u>

נעזר במשפט שבהינתן שתי קבוצות A, B כך ש $|A| = n$ ו $|B| = k$, מספר הפונקציות מ A ל B הוא k^n.

א. במקרה זה $A = \{0,1\}^n$ ו $B = \{0,1\}$, כלומר $|A| = 2^n$ ו $|B| = 2$. לכן מספר הפונקציות הוא $2^{(2^n)}$.

ב. מכיון ש $f(x) = f(\bar{x})$, בהינתן $x \in \{0,1\}^n$ הערך של $\bar{x}$ כבר נקבע, לכן מספיק להגדיר את הפונקציה על חצי מהמחרוזות ב $\{0,1\}^n$.

באופן פורמלי נגדיר יחס שקילות על $\{0,1\}^n$ בצורה הבאה $R_1 = \{(x,y) \mid x = y \vee x = \bar{y}\}$.

כל פונקציה בוליאנית דואלית על $\{0,1\}^n$ מגדירה פונקציה בוליאנית על קבוצת המנה $\{0,1\}^n / R_1$.

מכיון ש $|\{0,1\}^n / R_1| = 2^{n-1}$, נקבל שמספר הפונקציות הוא $2^{(2^{n-1})}$.

ג. מספר הפונקציות הבוליאנות המאוזנות שווה למספר האפשרויות לחלק את $\{0,1\}^n$ לשתי תתי קבוצות שוות בגודלן, כלומר גודל כל תת קבוצה הוא 2^{n-1}.

מספר תתי הקבוצות בגודל 2^{n-1} של $\{0,1\}^n$ הוא $\binom{2^n}{2^{n-1}}$.

ד. עבור $0 \le i \le n$ נסמן ב a_i את המחרוזת שמתחילה ב i 1'ים ומסתיימת ב $n - i$ אפסים.

כלומר $a_0 = 0 \dots 0 \in \{0,1\}^n$, $a_1 = 10 \dots 0 \in \{0,1\}^n$, $a_n = 1 \dots 1 \in \{0,1\}^n$.

בפונקציה בוליאנית סימטרית, מספר ה1'ים קובע את הערך ולא מיקומם, לכן מספיק להגדיר את ערך הפונקציה למחרוזות a_i עבור $0 \le i \le n$.

באופן פורמלי נגדיר יחס שקילות על $\{0,1\}^n$ בצורה הבאה

$$R_2 = \{(x,y) \mid x \text{ and } y \text{ have the same number of bits that equal } 1\}$$

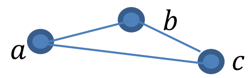
כל פונקציה בוליאנית סימטרית על $\{0,1\}^n$ מגדירה פונקציה בוליאנית על קבוצת המנה $\{0,1\}^n / R_2$.

מכיון ש $|\{0,1\}^n / R_2| = n + 1$, נקבל שמספר הפונקציות הוא 2^{n+1}.

תורת הגרפים

<u>הגדרה</u>: גרף לא מכוון הוא זוג סדור $G=(V,E)$, כאשר V קבוצה של קודקודים (או צמתים), ו E קבוצה של תתי קבוצות בגודל 2 של V. אברי E נקראים צלעות (או קשתות).
עבור $u,v\in V$, נסמן צלע מ u ל v ע"י (u,v) (זהירות - זה לא זוג סדור אלא קבוצה, כלומר $(u,v)=(v,u)$!!!).
אם V,E קבוצות סופיות אזי G נקרא גרף סופי (אנחנו נעסוק רק בגרפים סופיים).

<u>דוגמה</u>: הגרף הלא מכוון $V=\{a,b,c\}$ ו $E=\{(a,c),(a,b),(b,c)\}$ הוא:

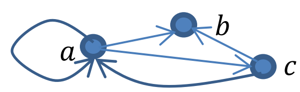


<u>הערה</u>: יש הגדרות יותר כלליות לגרף:
אם נאפשר ב E תתי קבוצות בגודל 1 נקבל גרף עם לולאות (נקרא גם פסאודו גרף).
אם E היא מולטי קבוצה אזי יתכנו מספר צלעות בין זוג קודקודים (נקרא גם מולטי גרף).
אנחנו הגדרנו גרף פשוט - גרף ללא לולאות וללא צלעות מקבילות.

<u>הגדרה</u>: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון, ויהיו $u,v\in V$. נאמר ש u,v שכנים אם $(u,v)\in E$, כלומר קיימת צלע המחברת ביניהם. הדרגה של קודקוד $u\in V$ היא מספר שכניו $\deg(u)=|\{v\in V:(u,v)\in E\}|$.
בדוגמה הקודמת $\deg(a)=\deg(b)=\deg(c)=2$.

<u>הגדרה</u>: גרף מכוון הוא זוג סדור $G=(V,E)$, כאשר V קבוצת קודקודים ו $E\subseteq V\times V$ קבוצת צלעות.

<u>דוגמה</u>: הגרף המכוון $V=\{a,b,c\}$ ו $E=\{(a,a),(a,c),(c,a),(a,b),(c,b)\}$ הוא:

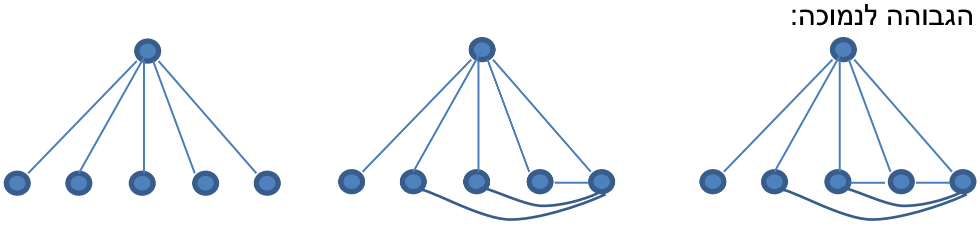


<u>הגדרה</u>: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון ויהיו $u,v\in V$.
נאמר ש v שכן של u אם $(u,v)\in E$, כלומר אם קיימת צלע מ u ל v.
דרגת הכניסה של $u\in V$ היא מספר הקודקודים ש u שכן שלהם, כלומר $\text{indeg}(u)=|\{v\in V:(v,u)\in E\}|$.
דרגת היציאה של $u\in V$ היא מספר השכנים של u, כלומר $\text{outdeg}(u)=|\{v\in V:(u,v)\in E\}|$.
הדרגה של $u\in V$ היא $\deg(u)=\text{indeg}(u)+\text{outdeg}(u)$.
בדוגמה דרגת הכניסה של a היא 2, ודרגת היציאה היא 3. דרגת הכניסה של b היא 2, ודרגת היציאה היא 0.
דרגת הכניסה של c היא 1, ודרגת היציאה היא 2.

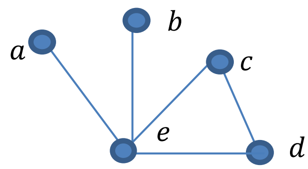
<u>משפט</u>: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון סופי. אזי $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$.
<u>רעיון ההוכחה</u>: כל צלע $(u,v)\in E$ מחברת בין שני קודקודים שונים, ולכן נספרת פעם ב $\deg(u)$ ופעם ב $\deg(v)$.

<u>תרגיל</u>: האם קיים גרף לא מכוון שדרגות קודקודיו הן 1,2,3,3,4,4?
<u>פתרון</u>: לא, סכום הדרגות 17 אינו זוגי.

<u>תרגיל</u>: האם קיים גרף לא מכוון שדרגות קודקודיו הן 1,2,3,3,4,5?
<u>פתרון</u>: כן. נבנה את הגרף מהדרגה הגבוהה לנמוכה:



הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון. סדרה של קודקודים $(v_0,\dots,v_k)$ נקראת מסלול אם לכל $0\le i\le k-1$ מתקיים $(v_i,v_{i+1})\in E$ והצלעות (v_i,v_{i+1}) שונות זו מזו.
אורך המסלול $(v_0,v_1,\dots,v_k)$ הוא מספר הצלעות k.
מסלול פשוט הוא מסלול שבו כל הקודקודים שונים זה מזה.

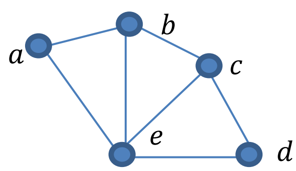


דוגמה: (a,e,c,d,e,b) מסלול מ a ל b.
(a,e,b) מסלול פשוט מ a ל b.

הגדרה: יהיו $u,v\in V$ שני קודקודים. המרחק בין u ל v מוגדר כאורך המינימלי של מסלול ביניהם ומסומן $d(u,v)$.
אם אין מסלול בין u ל v נגדיר $d(u,v)=\infty$.
קוטר הוא המרחק המקסימלי בגרף בין זוג קודקודים כלשהם.

דוגמה: בדוגמה הקודמת $d(a,b)=2$, קוטר הגרף הוא 2.

הגדרה: מסלול לא ריק $(v_0,\dots,v_k)$ שבו $v_0=v_k$ נקרא מעגל.
מעגל פשוט הוא מעגל שבו לכל $0\le i,j\le k-1$, אם $i\ne j$ אז $v_i\ne v_j$.



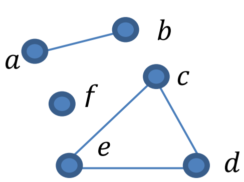
דוגמה: (a,b,e,c,d,e,a) מעגל.
(a,b,c,d,e,a) מעגל פשוט.

הערה: המושגים הנ"ל מוגדרים באופן דומה גם עבור גרפים מכוונים.

הגדרה: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון.
$G'=(V',E')$ הוא תת-גרף של G אם $V'\subseteq V$ ו $E'\subseteq E$ ובנוסף G' גרף, כלומר לכל צלע $(u,v)\in E'$ מתקיים $u,v\in V'$.
נאמר ש G' מוכל ב G.

הגדרה: גרף לא מכוון נקרא קשיר אם יש מסלול בין כל זוג קודקודים.
רכיב קשירות הוא תת גרף קשיר מקסימלי (כלומר אם מוכל בתת גרף קשיר כלשהו אזי הם שוים).

דוגמה: בדוגמה הקודמת הגרף קשיר.

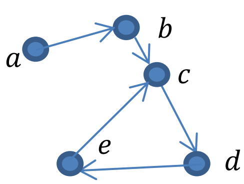


דוגמה: נסתכל על הגרף הלא מכוון $V=\{a,b,c,d,e,f\},E=\{(a,b),(c,d),(c,e),(d,e)\}$.
הגרף לא קשיר ויש שלושה רכיבי קשירות:

$V_1=\{a,b\},E_1=\{(a,b)\}$
$V_2=\{c,d,e\},E_2=\{(c,d),(c,e),(d,e)\}$
$V_3=\{f\},E_3=\emptyset$

שימו לב ש $V'=\{c,d\},E'=\{(c,d)\}$ הוא אמנם תת גרף קשיר, אך אינו רכיב קשירות כי אינו מקסימלי.

הגדרה: גרף מכוון נקרא קשיר חזק אם לכל שני קודקודים $u,v\in V$ יש מסלול מ u ל v ומסלול מ v ל u.
רכיב קשירות חזקה הוא תת גרף קשיר חזק מקסימלי.

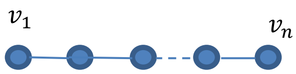


דוגמה: הגרף המכוון $V=\{a,b,c,d,e\},E=\{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e),(e,c)\}$.
הגרף לא קשיר חזק, למשל אין מסלול מ e ל a.
יש שלושה רכיבי קשירות חזקה:

$V_1=\{a\},E_1=\emptyset$
$V_2=\{b\},E_2=\emptyset$
$V_3=\{c,d,e\},E_3=\{(c,d),(d,e),(e,c)\}$

<u>תרגיל</u>: מהו הקוטר המקסימלי D של גרף לא מכוון קשיר עם n קודקודים?

<u>פתרון</u>:



הגרף קשיר ולכן לכל $u, v \in V$ מתקיים $d(u,v) < \infty$, לכן $D < \infty$.

מצד אחד עבור גרף השרוך (באיור) מתקיים $d(v_1, v_n) = n-1$, ולכן $D \geq n-1$.

מצד שני, נוכיח ש $D \leq n-1$.

יהי $G = (V,E)$ גרף לא מכוון קשיר עם n קודקודים, ויהיו $u, v \in V$ זוג קודקודים.

אם יש מסלול מ u ל v באורך n, אזי הוא עובר ב $n+1$ קודקודים.

לכן המסלול לא פשוט, ומתקיים $d(u,v) < n$ כלומר $d(u,v) \leq n-1$. נובע מכך ש $D \leq n-1$.

לסיכום $D = n-1$.

<u>תרגיל</u>: יהי G גרף לא מכוון עם n קודקודים. נסמן ב $\delta(G)$ את הדרגה המינימלית בגרף, נניח כי $\delta(G) > 1$.

א. הוכח כי יש ב G מסלול פשוט מאורך לפחות $\delta(G)$.

ב. הוכח כי יש ב G מעגל פשוט מאורך לפחות $\delta(G)+1$.

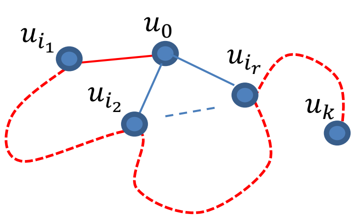
<u>הוכחה</u>:

א. $\delta(G) > 1$ ולכן לכל קודקוד יש לפחות שני שכנים.

יהי $P = (u_0, u_1, \ldots, u_k)$ מסלול פשוט מאורך מקסימלי ב G (קיים מסלול מקסימלי כי G סופי).

יהי v שכן של u_0.

אם לכל $0 \leq i \leq k$ מתקיים $v \neq u_i$ אזי ניתן להאריך את P למסלול $(v, u_0, u_1, \ldots, u_k)$ ונקבל סתירה למקסימליות של P, לכן כל שכניו של u_0 נמצאים במסלול, ונקבל ש $k \geq \delta(G)$ כנדרש.



ב. נסתכל שוב על $P = (u_0, u_1, \ldots, u_k)$ מסלול פשוט מאורך מקסימלי ב G.

נסמן ב r את מספר השכנים של u_0 (בפרט $r \geq \delta(G)$).

נסמן את שכניו של u_0 כ $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_r}\}$ כאשר $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq k$.

אזי $\left(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{i_r - 1}, u_{i_r}, u_0\right)$ הוא מעגל פשוט בגרף באורך $i_r + 1$.

בנוסף מתקיים $i_r + 1 \geq r + 1 \geq \delta(G) + 1$.

<u>תרגיל</u>: יהי G גרף לא מכוון עם n קודקודים שבו דרגת כל קודקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$.

הוכח ש G קשיר ושהקוטר של G הוא לכל היותר 2.

<u>הוכחה</u>:

נוכיח ש G קשיר. נניח בשלילה ש G אינו קשיר, כלומר קיימים שני קודקודים $u, v \in V$ כך שאין מסלול ביניהם.

נסמן את קבוצות השכנים של u, v בהתאמה $N(u) = \{\, w \mid (u,w) \in E \,\}$ ו $N(v) = \{\, w \mid (v,w) \in E \,\}$.

אם קיים $w \in N(u) \cap N(v)$ אזי יש מסלול (u, w, v) בין u ל v ונקבל סתירה, לכן $N(u) \cap N(v) = \emptyset$.

בנוסף $\left(N(u) \cup N(v)\right) \cap \{u, v\} = \emptyset$.

דרגת כל קודקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$ ולכן $|N(u)| \geq \frac{n-1}{2}$ וכן $|N(v)| \geq \frac{n-1}{2}$.

מעיקרון החיבור $|V| \geq |N(u) \cup N(v) \cup \{u,v\}| = |N(u)| + |N(v)| + |\{u,v\}| \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + 2 = n+1$.

זו סתירה להנחה ש $|V| = n$.

נניח בשלילה כי הקוטר של G הוא לפחות 3, כלומר קיימים שני קודקודים $u, v \in V$ כך ש $d(u,v) \geq 3$.

נסמן שוב את קבוצות השכנים של u, v בהתאמה $N(u) = \{\, w \mid (u,w) \in E \,\}$ ו $N(v) = \{\, w \mid (v,w) \in E \,\}$.

נשים לב כי $N(u) \cap N(v) = \emptyset$, אחרת $d(u,v) = 2$ ונקבל סתירה.

כעת $|V| \geq |N(u)| + |N(v)| + |\{u,v\}| \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + 2 = n+1$, וזו סתירה להנחה ש $|V| = n$.