פתרון תרגיל 6 מד"ר קיץ תשע"ו

17 באוגוסט 2016

1. נבצע את ההתמרה ואז את ההתמרה ההפוכה.

(א) נבצע את ההתמרה על המשוואה ונקבל:

$$L\left(y''+2y'+y\right)=L\left(e^{3t}\right)$$

ההתמרה ליניארית ולכן:

$$L\left(y''\right)+2L\left(y'\right)+L\left(y\right)=\frac{1}{s-3}$$

נשתמש בנוסחה להתמרה של נגזרות:

$$s^2L\left(y\right)-s\cdot y\left(0\right)-y'\left(0\right)+2\left(s\cdot L\left(y\right)-y\left(0\right)\right)+L\left(y\right)=\frac{1}{s-3}$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל:

$$s^2L\left(y\right)-2s-3+2sL\left(y\right)-4+L\left(y\right)=\frac{1}{s-3}$$

נסדר מעט:

$$\left(s^2+2s+1\right)L\left(y\right)=\frac{1}{s-3}+2s+7=\frac{2s^2-s-20}{s-3}$$

לכן:

$$L\left(y\right)=\frac{2s^2-s-20}{\left(s-3\right)\left(s+1\right)^2}$$

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{2s^2-s-20}{\left(s-3\right)\left(s+1\right)^2}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{\left(s+1\right)^2}$$

לכן:

$$2s^2-s-20=A\left(s^2+2s+1\right)+B\left(s^2-2s-3\right)+C\left(s-3\right)$$

נסדר לפי מקדמים:

$$2s^2 - s - 20 = (A+B)\,s^2 + (2A-2B+C)\,s + A - 3B - 3C$$

ולכן:

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ -1 = 2A - 2B + C \\ -20 = A - 3B - 3C \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה $A = 2 - B$. נציב זאת בשתי האחרות ונקבל:

$$\begin{cases} -1 = 4 - 4B + C \\ -20 = 2 - 4B - 3C \end{cases}$$

כלומר, $C = 4B - 5$. לכן:

$$-20 = 2 - 4B - 12B + 15$$

לכן $B = \frac{37}{16}$, לכן $C = \frac{17}{4}$, $A = -\frac{5}{16}$. נקבל:

$$L(y) = -\frac{5}{16(s-3)} + \frac{37}{16(s+1)} + \frac{17}{4(s+1)^2}$$

כעת, נפעיל את ההתמרה ההפוכה:

$$y = -\frac{5}{16}L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) + \frac{37}{16}L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{17}{4}L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)$$

כעת:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) = e^{3t}, L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-t}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) = te^{-t}$$

ולכן:

$$y = -\frac{5}{16}e^{3t} + e^{-t} + \frac{17}{4}te^{-t}$$

וזהו הפתרון.

(ב) נבצע את ההתמרה על המשוואה ונקבל:

$$L(y'' - y) = L(t)$$

לכן:

$$s^2L(y) - sy(0) - y'(0) - L(y) = \frac{1}{s^2}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\left(s^2 - 1\right)L(y) - 2s - 3 = \frac{1}{s^2}$$

לכן:

$$L(y) = \frac{1}{s^2\left(s^2-1\right)} + \frac{2s+3}{s^2-1}$$

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{s^2\left(s^2-1\right)} = \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2} = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{2s+3}{s^2-1} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1}$$

לכן:

$$2s + 3 = A(s+1) + B(s-1) = (A+B)s + A - B$$

לכן $A = \frac{5}{2}, B = -\frac{1}{2}$ ולכן:

$$\frac{2s+3}{s^2-1} = \frac{5}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)}$$

בסה"כ:

$$L(y) = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{s^2} + \frac{5}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s+1)}$$

כלומר:

$$L(y) = \frac{3}{s-1} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2}$$

נפעיל את ההתמרה ההפוכה:

$$y = 3L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

ובסך הכל:

$$y = 3e^t - e^{-t} - t$$

וזהו הפתרון.

(ג) נבצע את ההתמרה על המשוואה ונקבל:

$$L\left(y''\right)-2L\left(y'\right)+7L\left(y\right)=L\left(\sin t\right)$$

לכן:

$$s^{2}L\left(y\right)-s\cdot y\left(0\right)-y'\left(0\right)-2\left(s\cdot L\left(y\right)-y\left(0\right)\right)+7L\left(y\right)=\frac{1}{s^{2}+1}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\left(s^{2}-2s+7\right)L\left(y\right)=\frac{1}{s^{2}+1}$$

ולכן:

$$L\left(y\right)=\frac{1}{\left(s^{2}+1\right)\left(s^{2}-2s+7\right)}$$

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{\left(s^{2}+1\right)\left(s^{2}-2s+7\right)}=\frac{As+B}{s^{2}+1}+\frac{Cs+D}{s^{2}-2s+7}$$

כלומר:

$$1=\left(As+B\right)\left(s^{2}-2s+7\right)+\left(Cs+D\right)\left(s^{2}+1\right)$$

נסדר לפי מקדמים:

$$1=\left(A+C\right)s^{3}+\left(-2A+B+D\right)s^{2}+\left(7A-2B+C\right)s+7B+D$$

נשווה:

$$\begin{cases} 0=A+C\\ 0=-2A+B+D\\ 0=7A-2B+C\\ 1=7B+D \end{cases}$$

$A=-C,D=1-7B$. נציב זאת בשתי המשוואות האמצעיות:

$$\begin{cases} 0=2C+B+1-7B\\ 0=-7C-2B+C \end{cases}$$

כלומר $B=-3C$, ואם כן $C=-\frac{1}{20}$. לכן $A=\frac{1}{20}$, $B=\frac{3}{20}$ ולכן $D=-\frac{1}{20}$.
נקבל:

$$L\left(y\right)=\frac{1}{20}\left(\frac{s+3}{s^{2}+1}-\frac{s+1}{s^{2}-2s+7}\right)$$

נפעיל את ההתמרה ההפוכה:

$$y=\frac{1}{20}L^{-1}\left(\frac{s+3}{s^2+1}-\frac{s+1}{s^2-2s+7}\right)$$

כעת,

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)=\cos t, L^{-1}\left(\frac{3}{s^2+1}\right)=3\sin t$$

וכן:

$$L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2-2s+7}\right)=L^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+6}\right)+L^{-1}\left(\frac{2}{(s-1)^2+6}\right)$$

לכן:

$$L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2-2s+7}\right)=e^t\cos\sqrt{6}t+\frac{2}{\sqrt{6}}e^t\sin\sqrt{6}t$$

בסך הכל:

$$y=\frac{1}{20}\left(\cos t+3\sin t-e^t\cos\sqrt{6}t-\frac{2}{\sqrt{6}}e^t\sin\sqrt{6}t\right)$$

וזהו הפתרון.

2. נציג את הפונקציה באמצעות פונקציות מדרגות:

$$y''+3y'+2y=tu_{0,1}(t)+(2-t)\,u_{1,2}(t)$$

כלומר:

$$y''+3y'+2y==tu_0(t)-tu_1(t)+2u_1(t)-tu_1(t)+2u_2(t)-tu_2(t)$$

נפעיל את ההתמרה על שני האגפים. באגף שמאל נקבל:

$$s^2L(y)-s\cdot y(0)-y'(0)+3(s\cdot L(y)-y(0))+2L(y)$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל:

$$\left(s^2+3s+2\right)L(y)$$

באגף ימין נקבל:

$$L(tu_0(t))=-\frac{d}{ds}(L(u_0(t)))=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s^2}$$

$$L\left(tu_1(t)\right) = -\frac{d}{ds}\left(L\left(u_1(t)\right)\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-s}}{s}\right) = \frac{e^{-s}(s+1)}{s^2}$$

$$L\left(2u_1(t)\right) = \frac{2e^{-s}}{s}$$

$$L\left(tu_2(t)\right) = -\frac{d}{ds}\left(L\left(u_2(t)\right)\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-2s}}{s}\right) = \frac{e^{-2s}(2s+1)}{s^2}$$

$$L\left(2u_2(t)\right) = \frac{2e^{-2s}}{s}$$

כלומר, המשוואה היא:

$$\left(s^2+3s+2\right)L(y) = \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-s}(s+1)}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}(2s+1)}{s^2}$$

נסדר:

$$\left(s^2+3s+2\right)L(y) = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{2}{s^2}\right) - e^{-2s}\left(\frac{2}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}\left(1-2e^{-2s}-2e^{-s}\right)$$

לכן:

$$L(y) = \frac{\left(1-2e^{-2s}-2e^{-s}\right)}{s^2(s+1)(s+2)}$$

נפרק את $\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}$ לשברים חלקיים ונקבל:

$$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{4}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right)$$

כעת, אנו צריכים לחשב את ההתמרה ההפוכה של ביטוי זה לבדו, של ביטוי זה כפול e^{-s} ושל ביטוי זה כפול e^{-2s}.

ההתמרה ההפוכה של הביטוי לבדו היא:

$$\frac{1}{4}L^{-1}\left(\frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{4}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{4}\left(2t-3+4e^{-t}-e^{-2t}\right)$$

לכן גם:

$$\frac{2}{4}L^{-1}\left(\left(\frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{4}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right)e^{-s}\right) = \frac{1}{2}u_1(t)\left(2(t-1)-3+4e^{-(t-1)}-e^{-2(t-1)}\right)$$

$$\frac{2}{4}L^{-1}\left(\left(\frac{2}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{4}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right)e^{-2s}\right) = \frac{1}{2}u_2(t)\left(2(t-2)-3+4e^{-(t-2)}-e^{-2(t-2)}\right)$$

ולכן:

$$y = \frac{1}{4}\left(2t-3+4e^{-t}-e^{-2t}\right)$$

$$+\frac{1}{2}u_1(t)\left(2(t-1)-3+4e^{-(t-1)}-e^{-2(t-1)}\right)$$

$$+\frac{1}{2}u_2(t)\left(2(t-2)-3+4e^{-(t-2)}-e^{-2(t-2)}\right)$$

ואם נפתח את פונקציות המדרגה נקבל את הפונקציה במפורש.
הפתרון הזה גזיר ברציפות בכל התחום (כולל הנקודות הבעייתיות $1,2$).

3. נפעיל את ההתמרה על שתי המשוואות:

$$\begin{cases} L(x')-L(y)=L(1) \\ L(y')+L(x)=L(e^t) \end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{cases} sL(x)-x(0)-L(y)=\frac{1}{s} \\ sL(y)-y(0)+L(x)=\frac{1}{s-1} \end{cases}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} sL(x)-L(y)=\frac{1}{s} \\ sL(y)+L(x)=\frac{1}{s-1} \end{cases}$$

לכן $L(y)=sL(x)-\frac{1}{s}$. נציב במשוואה השנייה ונקבל:

$$s^2L(x)-1+L(x)=\frac{1}{s-1}$$

לכן:

$$L(x)=\frac{\frac{1}{s-1}-1}{s^2+1}=\frac{2-s}{(s-1)(s^2+1)}$$

נפרק לשברים חלקיים ונקבל:

$$L(x)=-\frac{s}{2(s^2+1)}-\frac{3}{2(s^2+1)}+\frac{1}{2(s-1)}$$

נפעיל את ההתמרה ההפוכה ונקבל:

$$x=-\frac{1}{2}\cos t-\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}e^t$$

כמו כן, ההתמרה של y היא:

$$L(y)=sL(x)-\frac{1}{s}=\frac{2s-s^2}{(s-1)(s^2+1)}-\frac{1}{s}$$

נפרק לשברים חלקיים ונקבל:

$$L\left(y\right)=\frac{-3s}{2\left(s^{2}+1\right)}+\frac{1}{2\left(s^{2}+1\right)}+\frac{1}{2\left(s-1\right)}$$

נפעיל את ההתמרה ההפוכה ונקבל:

$$y=-\frac{3}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}e^{t}$$

אם כן, הוקטור:

$$\left(\begin{array}{c} x\\ y \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2}\cos t-\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}e^{t}\\ -\frac{3}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}e^{t} \end{array}\right)$$

הוא וקטור הפתרונות של המערכת.