תרגיל 6

להגשה עד 4.1.17

שאלה 1

יהיו $(\mathbb{X},\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה חיובית, $E\in\mathbb{A}$ כך ש: $\mu(E)>0$ וגם: $\mu(\mathbb{X}\setminus E)>0$.
נגדיר סדרה $f_n\colon\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ על ידי: לכל $k\in\mathbb{N}$:

$$f_{2k}:=\mathbf{1}_{E^c}$$
$$f_{2k-1}:=\mathbf{1}_{E}$$

הראו כי מקרה זה מהווה דוגמא לאי שוויון חד בלמה של פאטו.

שאלה 2

יהיו $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח, $f\colon X\to\mathbb{R}$ פונקציה ב־$L^1(\mu)$. לכל $t\in\mathbb{R}$ נגדיר:

$$F(t):=\int_X f(x)\cos\left(e^t f(x)\right)d\mu(x).$$

הוכיחו כי F מוגדרת ורציפה ב־$\mathbb{R}$.

שאלה 3

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות חסומות (כל אחת בנפרד) מ־X ל־$\mathbb{R}$, כך ש: $f_n\to f$ במידה שוה מעל X.

1. הוכיחו כי $\|f\|_U:=\sup_{x\in X}|f(x)|<\infty$ (כלומר: f חסומה ב־ X), וכי $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_U<\infty$.
2. הוכיחו כי אם $(X,\mathbb{A},\mu)$ ממ"ח, וכל f_n מדידה־$\mathbb{A}$, ו־ $\mu(X)<\infty$ אז $\int_X f_n d\mu\to\int_X f d\mu$.
3. תנו דוגמא של ממ"ח $(X,\mathbb{A},\mu)$, כך ש: $\mu(X)=\infty$, וסדרת פונקציות מדידות־$\mathbb{A}$: $(f_n)_{\mathbb{N}}$ כך ש־ $f_n\to f$ במידה שוה, אבל $\int_X f_n d\mu\not\to\int_X f d\mu$.

שאלה 4

תהי m מידת לבג מעל $\mathbb{R}$ ותהי $f\in L^1(m)$. לכל $x\in\mathbb{R}$ תהי

$$F(x):=\int_{(-\infty,x)} f dm$$

אזי F רציפה במידה שווה ב־$\mathbb{R}$.

שאלה 5

תהי $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות מדידות אי שליליות מעל מרחב מידה חיובית $(\mathbb{X},\mathbb{A},\mu)$.
הוכיחו:

1. אם $f_n\searrow f$ וקיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש: $\int_{\mathbb{X}} f_N d\mu<\infty$ אזי: $\int_{\mathbb{X}} f_n d\mu\to\int_{\mathbb{X}} f d\mu$.
2. אם $f_n\to f$ ולכל $n\in\mathbb{N}$: $f_n\le f$ אזי: $\int_{\mathbb{X}} f_n d\mu\to\int_{\mathbb{X}} f d\mu$.

שאלה 6

תהי $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת $g(x)=g(x+1)$ לכל $x\in\mathbb{R}$, ובנוסף: $\int_0^1 g(x)dx<\infty$. נגדיר:

$$f(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(nx)}{n^2}$$

הראו ש f סופית כב"מ.

בהצלחה!!