# תרגיל 12

**הגדרה 1.** יהי $M$ מודול מעל $R$. נאמר שאיבר $0 \neq x \in M$ הוא מפותל אם קיים $0 \neq r \in R$ כך ש-$rx = 0$ (אם $R$ אינו תחום שלמות, נאמר ש-$x$ מפותל רק אם קיים $r$ רגולרי כך ש-$rx = 0$).
נגדיר את הפיתול של $M$ להיות הקבוצה

$$Tor_R(M) = \{m \in M such that \exists (0 \neq r \in R),\, r \cdot m = 0\}$$

נקרא ל-$M$ מפותל אם כל איבריו מפותלים, כלומר $Tor_R(M) = M$. נאמר ש-$M$ חסר פיתול אם אין בו איברים מפותלים שונים מאפס.

1. יהי $R$ תחום שלמות. אז $Tor(M)$ הוא תת־מודול של $M$.
במקרה כזה, ראוי לקרוא ל-$Tor(M)$ תת־מודול הפיתול של $M$
2. יהי $M$ מודול מעל $R$ עבורו $Tor(M)$ הוא תת־מודול. אז $M/Tor(M)$ הוא מודול חסר פיתול מעל $R$.
3. הראו כי $M$ הוא מודול נאמן מעל $R/Ann(M)$.
4. יהי $M$ מודול מעל $R$ ו$I \trianglelefteq R$. הוכיחו ש$M$ הוא מודול מעל $R/I$ עם הפעולה הטבעית $(r+I)m = rm$ אמ"ם $I \subseteq Ann(M)$
5. יהיו $M, N$ מודולים איזומורפיים מעל $R$. אז $Ann(M) = Ann(N)$.