

לינארית 2- תרגיל 11

1.

הוכיחו או הפריכו (ע"י דוגמא נגדית) את הטענות הבאות:

א. יהיו U_1, U_2, U_3 תת-מרחבים של ממי"פ בעל ממד סופי V .
אם מתקיים: $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 = V$, אזי $U_1^\perp \oplus U_2^\perp \oplus U_3^\perp = V$.

ב. יהיו U, W תת-מרחבים של ממי"פ V , כך ש- $U \oplus W = V$, אזי $W = U^\perp$.

ג. ניקח $V = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ונצייד אותו במכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תהי $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצת וקטורים ב- V , כאשר $k \geq 2$.

אם $A^\perp = (A - \{v_1\})^\perp$, אז A תלויה לינארית.

2.

5.6 תרגיל. נגדיר מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}^{n \times n}$ ע"י $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$. מצא את המרחב הניצב עבור

התת-מרחבים הבאים:

א. מרחב המטריצות העל-אלכסוניות

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & & & \vdots \\ & & & * \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

ב. מרחב המטריצות המקיימות $\text{tr}(A) = 0$.

(למי שלא ברור הכתב בשורה הראשונה: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$)

3. א.

תנו דוגמה לטרנספורמציה לינארית $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ שמקיימת

$$T(1, 0, 1, 1) = (1, 2, 1, 1) \text{ וגם } (\ker T)^\perp = \text{Sp}\{(1, 2, 0, 4), (-1, 0, 1, 0)\}$$

(אין צורך לתת נוסחה מפורשת עבור $T(x, y, z, t)$)

ב.

תהי $A = \{u, v, w\}$ קבוצת וקטורים ב- \mathbb{R}^4 .

$$A^\perp = \text{Sp}\{(1, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 2), (2, 1, 2, 2)\}$$

הוכח כי הקבוצה A תלויה לינארית.

4. יהי V מרחב אוניטרי (כלומר ממי"פ מעל \mathbb{C}) ו- $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V .

$$\|v_1 + \sqrt{2}v_2 + \sqrt{3}v_3 + \dots + \sqrt{n}v_n\|$$

חשבו את

5. א. יהי $U = Sp\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ ת"מ של מ"פ בעל ממד סופי V . נניח כי הקבוצה $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ תלויה לינארית. הוכיחו, כי אם נבצע על הוקטורים הנ"ל תהליך גרס-שמידט, בהכרח נקבל בשלב מסוים $u_i^* = 0$.

ב. מדוע לא ניתן להמשיך בתהליך במקרה של סעיף א', ללא הכנסת שינויים כלשהם?

ג. כיצד ניתן בכל זאת להשתמש בתהליך זה לצורך בניית בסיס אורתוגונאלי ל- U ?

6. (שאלת בונוס- 15 נק')

יהי $V = C[-1, 1]$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[-1, 1]$, עם המכפלה הפנימית $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ ויהי W תת המרחב של כל הפונקציות הרציפות הזוגיות $(f(x) = f(-x))$ על הקטע. מהו W^\perp ? האם מתקיים $V = W \oplus W^\perp$? (נמקו)

רמז: זו למעשה שאלה באינפי. עליכם לגייס את הידע על אינטגרל מסוים (כולל טענות מסוימות מאינפי בנושא), ובנוסף עליכם לדעת ולהבין היטב מהי פונקציה זוגית, כיצד לקבל פונקציה זוגית מפונקציה נתונה כלשהי, וכ"ל.

בהצלחה!!