אלגברה מופשטת 2 – תרגול 7

הגדרה:

יהי R חוג ותהי S תת-קבוצה שמקיימת:

א. S מהווה מונויד ביחס לכפל שאינה כוללת מחלקי אפס.

ב. $0 \notin S$.

ג. $S \subseteq Z(R)$.

נסמן ב $S^{-1}R$ את קבוצת מחלקות השקילות של $S \times R$ תחת היחס $(s,r) \sim (s',r') \Leftrightarrow rs' = sr'$. את המחלקה של (s,r) מסמנים ב $\frac{r}{s}$.

$S^{-1}R$ הוא חוג ונקרא **המיקום (או לוקליזציה) של** R **ב** S. ויש מונומורפיזם טבעי $i: R \to S^{-1}R$ המקיים $i(r) = \frac{r}{1}$. אברי S הולכים לאיברים הפיכים תחת מונומורפיזם זה.

בתרגול זה נתמקד בעיקר בחוגים קומוטטיביים, שם ג. מתקיים אוטומטית.

דוגמאות:

1. ניקח $R = \mathbb{Z}$ ו $S = \{3^k : k \in \mathbb{N}\}$. אזי $S^{-1}R = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right]$. [הערה: הומומורפיזם ההצבה $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right]$ שלוקח את $x \to 3$ איננו מונומורפיזם, משום שהגרעין איננו טריוויאלי, למשל $3x - 1 \to 0$.]
2. יהי $p \in \mathbb{Z}$ ראשוני, אזי הקבוצה $S = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ סגורה לכפל. $\mathbb{Z}_{(p)} = S^{-1}\mathbb{Z}$ הוא חוג קומוטטיבי עם יחידה.

טענה:

לחוג $\mathbb{Z}_{(p)}$ יש אידיאל מקסימלי יחיד והוא $p\mathbb{Z}_{(p)}$.

הוכחה:

$\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)}=\mathbb{Z}_p$. זהו שדה, ולכן $p\mathbb{Z}_{(p)}$ הוא מקסימלי. נניח בשלילה כי קיים אידיאל מקסימלי אחר I. כל איבר שונה מאפס ב $\mathbb{Z}_{(p)}$ הוא מהצורה $\frac{a}{b}p^k$ כאשר $a,b\in\mathbb{Z}\setminus p\mathbb{Z}$ ו $k\in\mathbb{N}$. אם $k\geq 1$ אז האיבר נמצא ב $p\mathbb{Z}_{(p)}$. מכיוון ש I חייב להכיל איבר שאינו נמצא ב $p\mathbb{Z}_{(p)}$, הוא מכיל איבר מהצורה $\frac{a}{b}$ כך ש $a,b\in\mathbb{Z}\setminus p\mathbb{Z}$, אך איבר זה הוא הפיך (ההופכי שלו הוא $\frac{b}{a}$), ולכן $I=\mathbb{Z}_{(p)}$ וזו סתירה.

טענה: יהי R חוג עם יחידה. נסמן ב A את קבוצת כל האיברים הלא הפיכים ב R. הוכח כי אם $A\lhd R$ אז הוא האידיאל המקסימלי היחיד של R.

הוכחה: הוא מקסימלי משום שאם קיים אידיאל גדול יותר המכיל אותו אז הוא מכיל איבר הפיך, וזו סתירה. באופן דומה, אם קיים אידיאל מקסימלי אחר, אז אף הוא מכיל איבר הפיך וגם זו סתירה.

הגדרה: יהי R חוג קומוטטיבי עם יחידה. נאמר כי הוא **מקומי** אם יש לו אידיאל מקסימלי אחד.

דוגמאות:

1. $\mathbb{Z}_{(p)}$ הוא מקומי.
2. לכל p ראשוני ומספר טבעי k, $\mathbb{Z}_{p^k}$ הוא מקומי.

הגדרה: אם R תחום שלמות אזי עבור $S=R\setminus\{0\}$, $S^{-1}R$ הוא שדה. השדה הזה נקרא שדה השברים של R.

דוגמאות:

1. $\mathbb{Q}$ הוא שדה השברים של $\mathbb{Z}$.
2. $F(x)=\{\frac{f(x)}{g(x)}:f,g\in F[x],g\neq 0\}$ (שדה הפונקציות הרציונליות) הוא שדה השברים של $F[x]$ (חוג הפולינומים) בהינתן שדה F.

משפט: בהינתן $\{I \triangleleft R : I \cap S = \phi\}$ ו $\{J \triangleleft S^{-1}R\}$

1. $I \leftarrow S^{-1}I$ זו התאמה על.
2. $J \rightarrow J \cap R$ זו התאמה חח"ע.
3. הטענה נכונה גם אם מגבילים אותה לאידיאלים ראשוניים.

הערה: כול להיווצר מצב ש $I \triangleleft R$ וגם $I \cap S = \phi$ איננו אידיאל ראשוני בעוד ש $S^{-1}I$ כן ראשוני ב $S^{-1}R$. למשל, $6\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ איננו ראשוני, אך אם לוקחים $S = \{2^k : k \in \mathbb{N}\}$ אז $S^{-1}(6\mathbb{Z}) = S^{-1}(3\mathbb{Z})$ שהוא ראשוני ב $S^{-1}\mathbb{Z}$ (לפי המשפט).

הגדרה: יהיה תחום שלמות R. $P \triangleleft R$ אידיאל ראשוני $S = R \setminus P$ סגורה לכפל. החוג $S^{-1}R$ נקרא מיקום של R ב P ומסומן ב R_P. זהו חוג מקומי, והאידיאל המקסימלי שלו הוא $PR_P = S^{-1}P$.

דוגמאות:

1. $R = \mathbb{Z}$, $P = p\mathbb{Z}$ עבור איזשהו ראשוני p. $S = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$. אזי מקבלים את החוג המקומי $\mathbb{Z}_{(p)}$.
2. D תחום שלמות, $R = D[x]$, $a \in D$, $P =< x - a >$, $S = R \setminus P$.
$S^{-1}R = D[x]_{<x-a>} = \{\frac{f}{g} : g \notin < x - a >\}$ הוא מקומי.

תרגיל: יהי M אידיאל מקסימלי בחוג קומוטטיבי עם יחידה R, ויהי $n \in \mathbb{N}$. אזי R / M^n הוא חוג מקומי קומוטטיבי ו M / M^n הוא האידיאל המקסימלי שלו.

הוכחה: על פי משט ההתאמה, כל אידיאל מקסימלי של R / M^n הוא מהצורה I / M^n כאשר I אידיאל מקסימלי של R המכיל את M^n. יהי אידיאל מקסימלי I / M^n. I מקסימלי ב R ולכן הוא ראשוני. מכיוון שהוא מכיל את M^n והוא ראשוני, אנו מקבלים ש $M \subseteq I$. אולם גם M מקסימלי, ולכן $I = M$. לכן אין אידיאלים מקסימליים פרט ל M / M^n ב R / M^n. זה שהוא בעצמו אכן אידיאל מקסימלי נובע ממשפט ההתאמה.

דוגמא:
אם F שדה אזי $F[x] \triangleright <x>$ הוא אידיאל מקסימלי (בגלל שהמנה נותנת את השדה חזרה). לכן $F[x]/<x^n>$ מקומי לכל n והאידיאל המקסימלי שלו הוא $xF[x]/<x^n>$.

תרגיל: כאשר $char(F) \neq 2$, האם $F[x]/<x^2-1> \cong F[x]/<x^2>$?
הוכחה: לא. נשים לב ש $<x^2-1>=<x-1><x+1>$, ומכיוון ש $(x+1)-(x-1)=2$ זהו מספר הפיך, נקבל $<x-1>+<x+1>=F[x]$, משמע הם קו-מקסימליים, ולכן $<x+1><x-1>=<x+1>\cap<x-1>$. משמע

$$F[x]/<x^2-1> \cong F[x]/(<x+1>\cap<x-1>)$$
$$\cong (F[x]/<x+1>)\times(F[x]/<x-1>) \cong F\times F$$

זהו בהחלט לא חוג מקומי, בגלל שיש לו שני אידיאלים מקסימליים $F\times\{0\}$ ו $\{0\}\times F$.

תרגיל: הוכיחו כי $\mathbb{Z}_2[x]/<x^2-1> \cong \mathbb{Z}_2[x]/<x^2>$.
הוכחה: תרגיל בית. רמז – בנו טבלת כפל.

(בהינתן ויאפשר הזמן)
משפט: התנאים הבאים שקולים עבור חוג קומוטטיבי
1. לכל $a,b\in R$, אם $a+b=1$ אזי a הפיך או b הפיך.
2. אוסף האיברים שאינם הפיכים ב R הוא אידיאל.
3. R הוא מקומי.

הערה: מכאן שבחוג מקומי, לכל איבר x או ש x הפיך או ש $1-x$ הפיך.

תרגיל בית: מהם ההפיכים ב $F[x]/<x^n>$?