תרגיל8   לינארית 2

סמסטר ב תשע"ח

תאריך הגשה: 4-6.6.2018 בתרגול.

תרגיל 1. א. נגדיר העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ המוגדרת על ידי $T(p(x))=p'(x)+p(0)$. מצאו את הפירוק הפירמרי של $\mathbb{R}_3[x]$ ביחס לT. (רמז: ראיתם את ההעתקה בתרגיל 7)

ב. נגדיר העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי T(x,y,z)=(x+y,y+z,0). האם המרחב הוקטורי $U=\{(a,b,0)|a,b\in\mathbb{R}\}$ הוא שמור תחת T?

ג. נגדיר העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי T(x,y,z)=(x+2y+z,3x+4y-z,5z). האם המרחב הוקטורי U=span{(1,0,0),(0,1,0)} הוא שמור תחת T?

תרגיל 2. נגדיר העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי T(x,y,z,w,k)=(x+2y,2x+y,2z+w,2w+k,3k). הצג את $\mathbb{R}^5$ כסכום ישר של תתי מרחבים אינווריאנטים ביחס ל-T.

תרגיל 3. מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

תרגיל 4. תהא $\mathbb{R}^{4\times4}\ni A=J_4(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ בלוק ג'ורדן. עבור איזה ערכי λ מתקיים כי A, A^2 דומות.

(רמז: למטריצות דומות אותם ערכים עצמיים ואותו פולינום מינימלי).

תרגיל 5. א. (אין צורך להגיש את סעיף א') יהיו A,B מטריצות בלוקים אלכסוניות מאותו גודל. $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Bn \end{pmatrix}$. הוכיחו כי

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_nB_n \end{pmatrix}$$

ב. תהיי A כך שכל המטריצות A_i הפיכות. הוכיחו כי אם A הפיכה אז:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_n^{-1} \end{pmatrix}$$

ג. הסיקו מסעיפים א' וב' שמטריצת בלוקים אלכסונית היא לכסינה אם כל בלוק הוא לכסין.

(הערה: מתקיים כי מטריצת בלוקים אלכסונית היא לכסינה אםם כל בלוק הוא לכסין אך התבקשתם להוכיח רק צד אחד).

תרגיל 6. תהיי $A \in \mathrm{F}^{7\times 7}$ ניל"ׂ (כלומר קיים k כך ש$A^k = 0$)

נתון: $A^2 \neq 0$,*rank(A)=4*. צ"ל: מהן צורות הזורדן האפשריות.

הדרכה:

א. מצאו את הפולינום האופייני של A. (רמז: מה הוא הערך העצמי של A? היזכרו בשיעורי בית 4).
ב. מהו הפולינום המינמלי של A?
ג. בנו טבלה (כפי שראיתם בתרגול). מה אתם יכולים להגיד על הריבוי הגאומטרי? חשבו על הנתון.
ד. הסיקו מה הן האפשרויות.