בוחן בחדוו"א 1

ענה על שלוש מתוך ארבע שאלות.

נמק תשובותיך.

משך הבוחן 120 דקות.

בהצלחה!!!

שאלה 1

סעיף א

רשום את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)=\arcsin(x-2)+3$ ושרטט את הפונקציה בתחום הגדרתה.

סעיף ב

חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2n-3}\right)^{\frac{n^3+1}{n^2-n}}$.

שאלה 2

סעיף א

חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2-1}-\sqrt{2n^2-n+5}\right)$.

סעיף ב

הראה כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ מתכנסת לגבול סופי.

שאלה 3

סעיף א

חשב את הגבול העליון והגבול התחתון, $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ של הסדרה $\left\{\frac{2n\sin\frac{n\pi}{2}}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

סעיף ב

חשב את גבול הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\ldots\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]$.

שאלה 4

סעיף א

חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2+8n-3}$.

סעיף ב

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n^3+2n}}{\sqrt[3]{n^8+3n^4}}$ מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר?

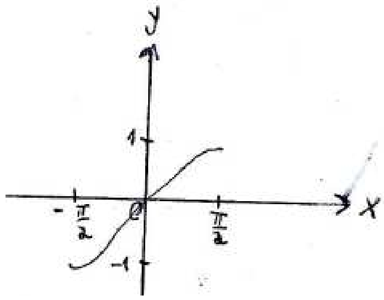
<u>**פתרון הבוחן**</u>

<u>שאלה 1</u>

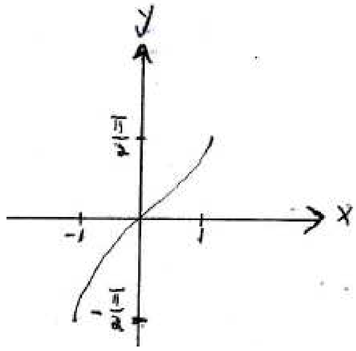
<u>סעיף א</u>

הפונקציה $\arcsin x$ מוגדרת רק עבור $-1 \le x \le 1$ ולכן תחום ההגדרה הוא $-1 \le x-2 \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 3$.

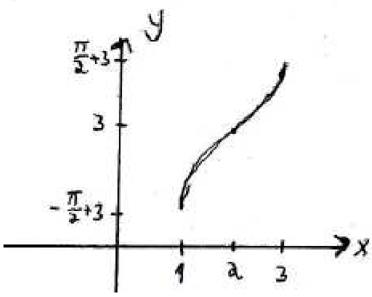
שרטוט הפונקציה $\sin x$.



שרטוט הפונקציה ההפוכה $\arcsin x$.



הפונקציה המבוקשת מתקבלת ע"י הזזת הפונקציה הקודמת שני "צעדים" ימינה ושלושה "צעדים" למעלה.



<u>סעיף ב</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2n-3}\right)^{\frac{n^3+1}{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n-3-n+4}{n^2+2n-3}\right)^{\frac{n^3+1}{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n-4}{n^2+2n-3}\right)^{\frac{n^3+1}{n^2-n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{{n^2+2n-3}\big/{n-4}}\right)^{\frac{n^3+1}{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{{n^2+2n-3}\big/{n-4}}\right)^{\frac{n^2+2n-3}{n-4}}\right)^{\frac{n-4}{n^2+2n-3}\cdot\frac{n^3+1}{n^2-n}}=\frac{1}{e}$$

<u>שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2-1}-\sqrt{2n^2-n+5}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n^2-1}-\sqrt{2n^2-n+5}\right)\cdot\left(\sqrt{2n^2-1}+\sqrt{2n^2-n+5}\right)}{\sqrt{2n^2-1}+\sqrt{2n^2-n+5}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1-2n^2+n-5}{\sqrt{2n^2-1}+\sqrt{2n^2-n+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-6}{\sqrt{2n^2-1}+\sqrt{2n^2-n+5}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

<u>סעיף ב</u>

נראה שהסדרה מונוטונית עולה

$$a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\Rightarrow a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

נשים לב שלכל n טבעי $a_n>0$ ובנוסף $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{1}{2^{n+1}}>1$ ולכן הסדרה מונוטונית עולה.

נוכיח שהסדרה חסומה.

מאי שוויון הממוצעים מתקיים $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\le\left(\frac{1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{4}+\ldots+1+\frac{1}{2^n}}{n}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e.$$

קיבלנו סדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת.

<u>שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

עבור התת סדרה a_{4k+1} נקבל

$$a_{2k}=\frac{2\cdot(4k+1)\cdot\sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right)}{4k+1+3}=\frac{(8k+2)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}{4k+4}=\frac{8k+2}{4k+4}\xrightarrow{k\to\infty}2$$

מכיוון ש $\sin\alpha\le1$ נקבל $\frac{2n\sin\frac{n\pi}{2}}{n+3}\le\frac{2n}{n+3}\xrightarrow{n\to\infty}2$ ולכן לא קיימת תת סדרה שהגבול שלה גדול מ 2 ז"א $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=2$.

עבור התת סדרה a_{4k-1} נקבל

$$a_{2k}=\frac{2\cdot(4k-1)\cdot\sin\left(\frac{(4k-1)\pi}{2}\right)}{4k-1+3}=\frac{(8k-2)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}{4k+2}=\frac{-8k+2}{4k+2}\xrightarrow{k\to\infty}-2$$

מכיוון ש $\sin\alpha\ge-1$ נקבל $\frac{2n\sin\frac{n\pi}{2}}{n+3}\ge-\frac{2n}{n+3}\xrightarrow{n\to\infty}-2$ ולכן לא קיימת תת סדרה שהגבול שלה קטן מ -2 ז"א $\underline{\lim_{n\to\infty}}=-2$.

<u>סעיף ב</u>

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\ldots\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdot\ldots\frac{(n-1)^2}{(n-2)n}\cdot\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=2\cdot\frac{n+1}{n+2}\xrightarrow{n\to\infty}2$$

<u>שאלה 4</u>

סעיף א

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2+8n-3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{4\cdot 1-1}-\frac{1}{4\cdot 1+3}+\frac{1}{4\cdot 2-1}-\frac{1}{4\cdot 2+3}+\frac{1}{4\cdot 3-1}-\frac{1}{4\cdot 3+3}+\\ \ldots+\frac{1}{4\cdot(k-1)-1}-\frac{1}{4\cdot(k-1)+3}+\frac{1}{4\cdot k-1}-\frac{1}{4\cdot k+3}\end{array}\right]=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{4\cdot 1-1}-\frac{1}{4\cdot k+3}\right]=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4k+3}\right]$$

קיבלנו שסדרת הסכומים החלקיים היא $\left\{\frac{1}{12}-\frac{1}{16n+12}\right\}_{n=1}^{\infty}$ גבול הסדרה הוא $\frac{1}{12}$.

סעיף ב

נשים לב ש $0=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n^3+2n}}{\sqrt[3]{n^8+3n^4}}$ מכיוון שהחזקה הגבוהה של המכנה קטנה מהחזקה הגבוהה של המונה. תנאי הכרחי להתכנסות טורים מתקיים.

נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\sqrt{n^3+2n}}{\sqrt[3]{n^8+3n^4}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+2n}}{\sqrt[3]{n^8+3n^4}}.$$

נשתמש במבחן ההשוואה השני

נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ בהרצאה ראינו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס אם ורק אם $1<\alpha$ ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ מתכנס.

נסמן $b_n=\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}, a_n=\frac{\sqrt{n^3+2n}}{\sqrt[3]{n^8+3n^4}}$ נקבל ש

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sqrt{n^3+2n}\cdot n^{\frac{7}{6}}}{\sqrt[3]{n^8+3n^4}}=\frac{\sqrt{(n^3+2n)\cdot n^{\frac{7}{3}}}}{\sqrt[3]{n^8+3n^4}}=\frac{\sqrt{n^{\frac{16}{3}}+2n^{\frac{10}{3}}}}{\sqrt[3]{n^8+3n^4}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

הטורים "חברים" והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n\sqrt{n^3+2n}}{\sqrt[3]{n^8+3n^4}}\right|$ מתכנס ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n^3+2n}}{\sqrt[3]{n^8+3n^4}}$ מתכנס בהחלט.