נכתב על ידי נועם יערי

דוגמאות למרחבי מכפלה פנימית

1. $V=\mathbb{F}^n$, $v=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix}{\gamma_1}'\\ \vdots\\ {\gamma_n}'\end{pmatrix}$.

$<v,w>=\gamma_1\cdot\overline{\gamma_1'}+\dots+\gamma_n\cdot\overline{\gamma_n'}$ (שיעור קודם).

2. $V=M_{m\times n}(\mathbb{F})$ (מטריצות מגודל $m\times n$). נגדיר לשתי מטריצות X,Y,

$<X,Y>=tr(X^t\overline{Y})$

כש- $\overline{Y}$ מוגדר איבר-איבר: אם $\mathrm{Y}=(y_{ij})$ ($1\le i\le m, 1\le i\le n$) אזי $\overline{\mathrm{Y}}=(\overline{y}_{ij})$ ($1\le i\le m, 1\le i\le n$).

נבדוק שזו מכפלה פנימית:

1) נחשב:

$$<\boldsymbol{\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2,Y}>=tr((\alpha_1X_1+\alpha_2X_2)^t\overline{Y})=tr\left(\alpha_1(X_1^t\overline{Y})+\alpha_2(X_2^t\overline{Y})\right)=$$
$$\boldsymbol{\alpha_1<X_1,Y>+\alpha_2<X_2,Y>}$$

$$<\boldsymbol{X,\beta_1Y_1+\beta_2Y_2}>=tr(X^t(\overline{\beta_1Y_1+\beta_2Y_2}))=tr\left(X^t(\overline{\beta_1Y_1}+\overline{\beta_2Y2})\right)=$$
$$=\boldsymbol{\overline{\beta_1}<X,Y_1>+<\overline{\beta_2}<X,Y_2>}$$

2) תזכורת: $tr(A^t)=tr(A)$, $tr(\overline{M})=\overline{tr(M)}$. נחשב:

$$<\boldsymbol{Y,X}>=tr(Y^t\overline{X})=_{\text{לפי התזכורת}}tr((Y^t\overline{X})^t)=tr(\overline{X}^t(Y^t)^t)=tr(\overline{X}^tY)=tr(X^t\overline{Y})=$$
$$\overline{<\boldsymbol{X,Y}>}$$

3) נחשב: $<\boldsymbol{X,X}>=tr(X^t\overline{X})$.

נסמן: $X=\begin{pmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ x_{m1}&\cdots&x_{mn}\end{pmatrix}$. לכן:

$$X^t=\begin{pmatrix}x_{11}&\cdots&x_{m1}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ x_{1n}&\cdots&x_{mn}\end{pmatrix},\quad \overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{x_{11}}&\cdots&\overline{x_{1n}}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \overline{x_{m1}}&\cdots&\overline{x_{mn}}\end{pmatrix}.$$

נסמן: $C=X^t\overline{X}\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נחפש את $c_{11},\dots,c_{nn}$ (איברי האלכסון הראשי).

$$c_{11}=x_{11}\overline{x_{11}}+x_{21}\overline{x_{21}}+\dots+x_{m1}\overline{x_{m1}}=|x_{11}|^2+\dots+|x_{m1}|^2$$
$$c_{22}=x_{12}\overline{x_{12}}+\dots+x_{m2}\overline{x_{m2}}=|x_{12}|^2+|x_{22}|^2+\dots+|x_{m2}|^2$$
$$\vdots$$

$$c_{nn} = |x_{1n}|^2 + \cdots + |x_{mn}|^2$$

$$tr\ C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|x_{ij}|^2 \geq 0$$

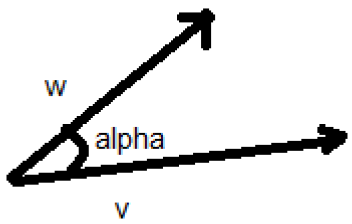
ובנוסף, $tr\ C = 0 \Leftrightarrow x_{ij} = 0$ לכל i, j.

$$< X, Y > = tr(X^t\bar{Y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\overline{y_{ij}}$$

הערה

כמסקנה, רואים שמכפלה זו זהה למכפלה מדוגמא ראשונה, אם נזהה $M_{n\times n}(F)$ עם $\mathbb{F}^{mn}$.

3. $V = \{$וקטורים גיאומטריים במישור$\}$.



$$< v, w > = \big||v| \cdot |w|\big| \cdot \cos(\alpha)$$

4. דוגמה מחדו"א:

$V = C[a, b]$ (פונקציות רציפות בקטע סגור (a, b)).

$$< f, g > = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

תזכורת

אם V מרחב מכפלה פנימית אזי אפשר להגדיר, לכל $v \in V$,

$||v|| = \sqrt{< v, v >}$ נורמה מישורת ממכפלה פנימית.

הגדרה

יהי V מרחב מכפלה פנימית. נסמן || || (מסומן כמו ערך מוחלט כפול) **נורמה מושרית**. נגדיר, לכל $v, w \in V$,

$d(v, w) = ||v - w||$ המרחק מ-v עד w.

d נקרא מרחק מושרה מנורמה.

תכונות של נורמה

1. הומוגניות: לכל $v\in V$, לכל $\alpha\in\mathbb{F}$: $||\alpha v||=|\alpha|\cdot||v||$ כש-$|\alpha|$ הוא המודול של α:

$\alpha=x+iy$ אזי $|\alpha|=\sqrt{x^2+y^2}$

הוכחה: $||\alpha v||^2=<\alpha v,\alpha v>=|\alpha|^2||v||^2$

$||\alpha v||=|\alpha|\cdot||v||$

2. חיוביות: $||v||\geq 0$, $||v||=0\Leftrightarrow v=0^{\rightarrow}$

הוכחה: מידית מחיוביות של מכפלה פנימית.

3. אי שוויון המשולש: $||v+w||\leq||v||+||w||$

להוכחה נעזר במשפט:

משפט פיתגורס

אם $<v,w>=0$, אזי $||v+w||^2=||v||^2+||w||^2$

הוכחה

$$<v,w>=0\Rightarrow<w,v>=\bar{0}=0$$

$$||v+w||^2=<v+w,v+w>=<v,v>+<v,w>_{=0}+<w,v>_{=0}+<w,w>$$
$$||v+w||^2=||v||^2+||w||^2$$

■

משפט (אי שוויון קושי בוניאקובסקי-שוורץ)

יהי V מרחב מכפלה פנימית. יהיו $v,w\in V$ אזי,

1: $|<v,w>|\leq||v||\cdot||w||$.

2: יש ב-1 שוויון $\Leftrightarrow$ v,w ת"ל.

הוכחה

נתבונן קודם במקרה $w=0$. המשפט מתקיים, ויש שוויון, ויש תלות לינארית. לכן נניח ש-$w\neq 0$, נגדיר וקטור $z=v-\frac{<v,w>}{<w,w>}w$ נבדוק ש- $<z,w>=0$.

$$<z,w>=<v-\frac{<v,w>}{<w,w>}w,w>=<v,w>-\frac{<v,w>}{<w,w>}<w,w>=0$$

מזה נובע ש-:

$$< z, \frac{< v, w >}{< w, w >} w > = 0$$

נסמן $\frac{<v,w>}{<w,w>} = \alpha$

כי $< z, \alpha w > = \bar{\alpha} < z, w > = 0$.

נשתמש במשפט פיתגורס ל-$z, \alpha w$. נקבל $||z + \alpha w||^2 = ||z||^2 + ||\alpha w||^2$ אבל $z + \alpha w = v$,

ז"א, $||v||^2 = ||z||^2 + ||\alpha w||^2 = ||z||^2 + |\alpha|^2 \cdot ||w||^2 \geq |\alpha|^2 \cdot ||w||^2$

כלומר $||v||^2 \geq |\alpha|^2 \cdot ||w||^2 = \left|\frac{<v,w>}{<w,w>}\right|^2 \cdot ||w||^2 = (| < v, w > \frac{|^2}{\left(||w||^2\right)^2} \cdot ||w||^2$

2. שוויון מתקיים אם ורק אם $||z|| = 0$ אם ורק אם $z = 0$. אבל $z = v - \alpha w$.

$z = 0 \Leftrightarrow v = \alpha w \Leftrightarrow \{v, w\}$ת"ל

■