

## בוחר בחשבון אינפיניטסימלי 3 230-88 תשע"ו

מתרגלים: עידן אלטר וניקול בלשוב

ט' טבת ה'תשע"ו 21.12.15

- יש לענות על כל השאלות. כל שאלה שווה 33 נקודות. שאלת הבונוס שווה 10 נקודות.
  - נמקו כל צעד. נימוק לא מספק יפגע בציון.
  - רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא.**
  - משך הבוחן: שעתיים.
  - חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי בלבד.
  - השאלות אינן מסודרות לפי רמת קושי.
1. יהי  $X$  מרחב מטרי. יהי  $a \in X$  ויהי  $r > 0$ .

(א) הוכיחו שאם  $X$  מרחב נורמי, אזי  $cl(B(a, r)) = B[a, r]$ .

(ב) מצאו דוגמה נגדית למקרה בו  $X$  אינו מרחב נורמי.

2. כל הפונקציות בשאלה הן  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

(א) האם הפונקציה  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(0, 0)$ ?

(ב) באלו נקודות הפונקציה:  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arcsin(xy-2)}{\arctan(3xy-6)} & (x, y) \neq (2, 1) \\ 0 & (x, y) = (2, 1) \end{cases}$  רציפה?  
באלו נקודות היא אינה רציפה?

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(ג) באלו נקודות הפונקציה דיפרנציאבילית?  
באלו נקודות היא אינה דיפרנציאבילית?

3. השאלה עוסקת בנגזרות כיווניות.

(א) חשבו את הנגזרת של  $f(x, y, z) = xy^2z^3$  בכיוון הוקטור  $h = (4, 3, 0)$  בנקודה  $a = (3, 2, 1)$ , עם וקטור כיוון שאורכו 1.

(ב) לפונקציה  $f(x, y, z)$  נגזרות חלקיות רציפות בסביבת  $M_0 = (1, 1, 2)$ . ידוע ש:  
 $f_x(M_0) = 1, f_y(M_0) = -2$  כמו כן, נתון שהנגזרת הכיוונית של  $f$  בנקודה  $M_0$  לפי כיוון הוקטור  $(2, 1, -2)$  עם וקטור כיוון שאורכו 1 שווה ל-1. מצאו את  $\nabla f(M_0)$ .

(ג) בנקודה  $(1, 1, 1)$ , באיזה כיוון הפונקציה  $f(x, y, z) = x \arctan(yz)$  עולה בקצב הגדול ביותר? הגדירו כיוון זה על ידי וקטור שאורכו 1.

**שאלת בונוס:**

יהיו  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ , עבורם:

$$a \times b + b \times c + c \times a = 0$$

הוכיחו כי שלושת הוקטורים נמצאים במישור העובר דרך הראשית.  
רמז: השתמשו בתכונות המכפלה הוקטורית, ולא בנוסחה שלה.