תת חבורה נורמלית,
משפט האיזומורפיזם הראשון

הרצאה 7

נכתב על ידי נועם יערי

29.11.2016

תזכורת

G חבורה.

הגדרה

יהיו $A, B \subseteq G$ אזי:

$$AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$$
$$aB = \{a\} \cdot B$$
$$Ab = A \cdot \{b\}$$
$$\{ab\} = \{a\} \cdot \{b\}$$

הגדרה

תת חבורה $H \leq G$ נורמלית אם $\forall x: Hx = xH$ (מסמנים $H \lhd G$).

כלומר, אם מתקיים:

$$\forall x \ \forall h \in H \ \ \exists h' \in H: hx = xh'$$

הגדרה

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \{a^{-1} | a \in A\}$$

הערה

$$H^{-1} \subseteq H \ \wedge H \cdot H \subseteq H \Leftrightarrow H_{\neq \emptyset} \leq G$$

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ 1 - & \begin{matrix} / \\ \backslash \end{matrix} & & \begin{matrix} \backslash \\ / \end{matrix} & - A \cap B \\ & & B & & \end{array}$$

בעיה

נניח $A, B \leq G$. האם $AB \leq G$?

טענה

$$AB \leq G \Leftrightarrow AB = BA$$

הוכחה

$\boxed{\Rightarrow}$

נניח ש - AB תת חבורה.

$$BA = B^{-1}A^{-1} \underset{\{b^{-1}a^{-1}\} = \{(ab)^{-1}\}}{=} (AB)^{-1} \overset{\text{תת } AB \text{ חבורה}}{=} AB$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \overset{A,B\leq G}{=} BA = AB$$

$$AB \cdot AB = A(BA)B = A(AB)B \overset{\substack{A^2\subseteq A,\\ B^2\subseteq B}}{\subseteq} A \cdot B$$

מסקנה

בחבורה אבלית, מכפלה של תתי חבורות היא תת חבורה.

דוגמא

$$G = GL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Longrightarrow \langle \alpha \rangle = \{1, \alpha\}$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Longrightarrow \langle \beta \rangle = \{1, \beta\}$$

$$\Longrightarrow \langle a \rangle \langle \beta \rangle = \{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$$

$$\langle \beta \rangle \langle \alpha \rangle = \{1, \alpha, \beta, \beta\alpha\}$$

$$\alpha\beta \neq \beta\alpha$$

$$\Longrightarrow \langle a \rangle \langle \beta \rangle \nleq G$$

מסקנה

לכל $G \leq H$ לכל $N \lhd G$, $H \cdot N \leq G$.

הוכחה

$$HN = \bigcup_{h\in H} hN = \bigcup_{h\in H} Nh = NH$$

טענה

נניח $N, K \lhd G$ אז $NK \lhd G$.

הוכחה

$$xNKx^{-1} = xNx^{-1}xKx^{-1} \subseteq NK$$

תרגיל

אם $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ משפחה של תתי חבורות נורמליות של G אז $\bigcap N_\lambda \lhd G$

תזכורת

אם $G \triangleright N$ אז:

$G/N = \{gN|g \in G\}$ היא חבורה ביחס לכפל $gN \cdot g'N = gg'N$.

$$\left|{}^{G}/_{N}\right| = [G:N] = \frac{|G|}{|N|}$$

הגדרה

הומומורפיזם $\varphi: G \to H$ הוא פונקציה המקיימת $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.

נשים לב שמתקיים:

$$\varphi(1_G) = 1_H \Longrightarrow \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$$

דוגמא

יש הומומורפיזם $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ לפי $k \mapsto [k]_{mod\ n}$.

הגדרות

הומומורפיזם חד חד ערכי נקרא מונומורפיזם (שיכון).

הומומורפיזם על נקרא אפימורפיזם (כיסוי).

הומומורפיזם חד חד ערכי ועל נקרא איזומורפיזם.

תרגיל

יהי $\varphi: G \to H$ הומומורפיזם.

$$\begin{array}{lcll} Im\,\varphi & = & \{\varphi(x)|x \in G\} & \leq H \\ \ker\varphi & = & \{x|\varphi(x) = 1\} & \leq G \end{array}$$

טענה

כל תת חבורה $G \leq H$ היא תמונה של איזשהו הומומורפיזם אל G.

הוכחה

H היא התמונה של השיכון $H \to G: \quad h \mapsto h$.

טענה

תהי $N \leq G$.

$G \triangleright N \Longleftrightarrow N$ היא גרעין של הומומורפיזם מ $- G$ לחבורה כלשהי.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נתבונן בהטלה $\vartheta: G \to {}^{G}/_{N}$ המוגדרת על ידי $g \mapsto gN$.

$$\begin{aligned} \vartheta(gg') &= gg'N \\ \vartheta(g)\vartheta(g') &= gN \cdot g'N \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vartheta(gg') = \vartheta(g)\vartheta(g')$$

$$\ker \vartheta = \{g | gN = 1N\} = \{g \in N\} = N$$

$\boxed{\Rightarrow}$

יהי $\varphi: G \to H$ הומומורפיזם.

$$N = \ker \varphi$$

יהי $x \in G$, $n \in N$.

$$\varphi(xnx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(n)\varphi(x)^{-1} = \varphi(x) \cdot 1 \cdot \varphi(x)^{-1} = 1$$

לכן $xnx^{-1} \in \ker \varphi = N$ כלומר $xNx^{-1} \subseteq N$.

בדיקה עצמית

$$N_1, N_2 \lhd, \qquad N_1 \neq N_2$$

$$N_1 \cap N_2 \lhd G$$

$$G/N_1 \cap G/N_2 = \emptyset$$

$$1_{G/N} = 1_G \cdot N = N$$

משפט האיזומורפיזם הראשון

יהי $\varphi: G \to H$ הומומורפיזם. אז $G/_{\ker\varphi} \cong Im\,\varphi$.

הוכחה

נסמן $K = \ker\varphi$.

"נגדיר" $\bar{\varphi}: G/_K \to Im\,\varphi$ לפי: $\bar{\varphi}(gK) = \varphi(g)$.

למה $\bar{\varphi}$ מוגדר היטב?

אם $gK = g'K$ אז $g' \in gK$ כלומר $\exists k \in K: g' = gK$

$$\varphi(g') = \varphi(gk) = \varphi(g)\varphi(k) \overset{k\in\ker\varphi}{=} \varphi(g)$$

כעת,

$$\bar{\varphi}(gK \cdot g'K) = \bar{\varphi}(gg'K) = \varphi(gg') = \varphi(g) \cdot \varphi(g') = \bar{\varphi}(gK) \cdot \bar{\varphi}(g'K)$$

$Im\,\bar{\varphi} = Im\,\varphi$ ולכן $\bar{\varphi}$ על.

$$\ker\bar{\varphi} = \{gK | \varphi(g) = 1, g \in K\} = \{K\}$$

$\Rightarrow$ $\bar{\varphi}$ חד חד ערכי

לכן, $\bar{\varphi}$ איזומופריזם.

מסקנה

כדי להוכיח ש - $A/_B \cong C$ מספיק למצוא אפימורפיזם $\varphi: A \to C$ כך ש - $\ker\varphi = B$.