משוואת בסל

תזכורת

משוואה מהצורה:

$$\boxed{x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y \quad = \quad 0 \quad , \quad \nu\in\mathbb{R}}$$

כאשר $\nu\notin\mathbb{Z}$, קיימים שני פתרונות בלתי תלויים לינארית בצורת טור פרובניוס.

- כאשר $\nu\notin\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, ההפרש בין שני האינדקסים אינו שלם.
- כאשר $\nu\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$, זוהי תכונה מיוחדת של משוואת בסל - המקדמים הזוגיים והאי זוגיים נפרדים, וכל אחד נותן פתרון אחר.

הגדרנו את $\mathcal{J}_n$ עבור $n\in\mathbb{Z}$ ואת $\mathcal{Y}_n$, המשלים את הפתרונות למשוואה, אך אינו רציף ב - 0.

■

פונקציית גמא

הגדרה

$$\boxed{\Gamma(x) \quad := \quad \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt}$$

תכונות

- מתקיים:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \\
&= \left[-t^{x-1}e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (x-1)t^{x-2}e^{-t}\,dt \\
&= (x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}\,dt \\
&= (x-1)\cdot\Gamma(x-1)
\end{aligned}$$

לכן:

$$\Gamma(n) \quad = \quad (n-1)!$$

- מתקיים:

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}\,dt \\
&= 1
\end{aligned}$$

- מתקיים:

$$\Gamma(-n) \quad = \quad \infty$$

שכן:

$$0\cdot\Gamma(0) \quad = \quad \Gamma(1) \quad = \quad 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(0) = \infty$$

$$-1 \cdot \Gamma(-1) = \Gamma(0)$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma(-1) = \infty$$

נקבל:

$$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}: \quad \frac{1}{\Gamma(-n)} = 0$$

- למשל:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)! &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt\\ &= \left\{u := \sqrt{t} \implies t = u^2\right\}\\ &= \int_0^\infty e^{-u^2}\, dt\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}$$

■

הערה

לכל $\nu \in \mathbb{R}$, הגדרנו:

$$\tilde{\mathcal{J}}_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j} \cdot j! \cdot (\nu+1) \cdots (\nu+j)} \cdot x^{2j+\nu}$$

לכן:

$$\tilde{\mathcal{J}}_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j} \cdot j! \cdot (\nu+1) \cdots (\nu+j)} \cdot x^{2j+\nu}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{J}}_\nu(x) &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\cdot\Gamma(\nu+1)}{2^{2j}\cdot j!\cdot\Gamma(\nu+j+1)}\cdot x^{2j+\nu} \\ &= \Gamma(\nu+1)\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2^{2j}\cdot j!\cdot\Gamma(\nu+j+1)}\cdot x^{2j+\nu}\end{aligned}$$

ונקבל את הנרמול המקובל:

$$\mathcal{J}_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\cdot\Gamma(\nu+j+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+\nu}$$

לכן, לכל $n\in\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{J}_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\cdot(n+j)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}$$

עבור $n<0$, המקדמים עד $j=|n|-1$, מתאפסים.

לכן:

$$\mathcal{J}_{-n}(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\cdot(j-|n|)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2j-|n|}$$

לכן, לכל $n\in\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{J}_{-n}(x) = (-1)^n\cdot\mathcal{J}_n(x)$$

■

פונקציה יוצרת

הגדרה

$$\boxed{G(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x)\cdot t^n}$$

למה

$$G(x,t) = e^{\frac{x}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

הוכחה

$$e^{\frac{x}{2}\cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k t^k}{2^k k!}$$

$$e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}x^{\ell}}{2^{\ell}t^{\ell}\ell!}$$

לכן:

$$\begin{aligned}
G(x,t) &= e^{\frac{x}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^k k!}\cdot t^k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}x^{\ell}}{2^{\ell}\ell!}\cdot\frac{1}{t^{\ell}}\right) \\
&\overset{\substack{n:=k-\ell \\ \ell+k=n+2\ell}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}x^{\ell}x^{k}}{2^{k+\ell}k!\,\ell!}\cdot t^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}}{(\ell+n)!\,\ell!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\ell}\cdot t^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot t^n
\end{aligned}$$

■

הערה

$$e^{\frac{x}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot t^n$$

נגזור לפי t, ונקבל:

$$\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\cdot e^{\frac{x}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\cdot\mathcal{J}_n(x)\cdot t^{n-1}$$

$$\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(n+1)\cdot\mathcal{J}_{n+1}(x)\cdot t^n$$

$$\frac{x}{2}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\mathcal{J}_n(x)+\mathcal{J}_{n+2}(x)\right)\cdot t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(n+1)\cdot\mathcal{J}_{n+1}(x)\cdot t^n$$

לכן:

$$\mathcal{J}_n(x)+\mathcal{J}_{n+2}(x) = \frac{2(n+1)}{x}\cdot\mathcal{J}_{n+1}(x)$$

נגזור לפי x, ונקבל:

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\cdot e^{\frac{x}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}'_n(x)\cdot t^n$$

$$\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}'_n(x)\cdot t^n$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\mathcal{J}_{n-1}(x)-\mathcal{J}_{n+1}(x)\right)\cdot t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}'_n(x)\cdot t^n$$

לכן:

$$\mathcal{J}_{n-1}(x)-\mathcal{J}_{n+1}(x) = 2\cdot\mathcal{J}'_n(x)$$

בפרט, עבור $n=0$:

$$-\mathcal{J}_1(x) = \mathcal{J}'_0(x)$$

■

הצגה אינטגרלית

$$\mathcal{J}_n(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\cos\left(n\vartheta - x\sin(\vartheta)\right)\,d\vartheta$$

$$\mathcal{J}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos\big(n\vartheta - x\sin(\vartheta)\big)\ d\vartheta$$

הוכחה

$$e^{\frac{x}{2}\cdot\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x) \cdot t^n$$

נציב $t := e^{i\vartheta}$, ונקבל:

$$e^{\frac{x}{2}\cdot\left(e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x) \cdot e^{in\vartheta}$$

$$e^{ix\sin\vartheta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x) \cdot e^{in\vartheta}$$

$-\sin\vartheta = \sin -\vartheta$, לכן:

$$e^{-ix\sin\vartheta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x) \cdot e^{-in\vartheta}$$

נתבונן בביטוי:

$$\begin{aligned}
\cos\big(m\vartheta - x\sin(\vartheta)\big) &= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{im\vartheta - ix\sin\vartheta} + e^{-im\vartheta + ix\sin\vartheta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-im\vartheta}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x)\cdot e^{in\vartheta} + e^{im\vartheta}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x)\cdot e^{-in\vartheta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x)\cdot\left(e^{-i(m-n)\vartheta} + e^{i(m-n)\vartheta}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x)\cdot\cos\big((m-n)\vartheta\big)
\end{aligned}$$

לכן:

$$\cos\big(m\vartheta - x\sin(\vartheta)\big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_n(x)\cdot\cos\big((m-n)\vartheta\big)$$

נבצע אינטגרציה:

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos\big(m\vartheta - x\sin(\vartheta)\big)\ d\vartheta \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathcal{J}_n(x)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\big((m-n)\vartheta\big)\ \ d\vartheta$$

מתקיים :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\big((m-n)\vartheta\big)\ \ d\vartheta \quad = \quad \begin{cases}0\ , & n\neq m\\ 1\ , & n=m\end{cases}$$

לכן :

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos\big(m\vartheta - x\sin(\vartheta)\big)\ d\vartheta \quad = \quad \mathcal{J}_m(x)$$

■