תרגיל 3

להגשה עד 7.12.16

שאלה 1

לכל אוסף קיבעו האם האוסף הוא אלגברה, והאם הוא σ־אלגברה.

1. $X = \{1,2,3,4\}$, ו־ $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3,4\}\}$.
2. $X = [0,1]$, ו־ $\mathcal{S} = \{\emptyset\} \cup \left\{A \ : \ \left[0, \frac{1}{2}\right] \subseteq A\right\}$.
3. $X = [0,1]$ ו־ $\mathcal{S} = \{A \ : \ \{0,1\} \subseteq A \text{ or } \{0,1\} \cap A = \emptyset\}$.
4. $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ו־ $A \in \mathcal{S}$ **אם לכל** $(x_n)_{\mathbb{N}} \in A$ מתקיים: $A \supseteq \{(y_n)_{\mathbb{N}} \in X \ : \ y_1 = x_1\}$.

שאלה 2

1. הראו שכל קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}$ היא איחוד בן מניה של קבוצות סגורות (תכונה זו נקראת F_σ).
2. הראו שכל קבוצה סגורה ב$\mathbb{R}$ היא חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות (תכונה זו נקראת G_δ).

שאלה 3

יהי $(X, \mathcal{S})$ מרחב מדיד ונניח כי μ הינה פונקצית קבוצות חיובית ואדיטיבית סופית כך ש־ $\mu(\emptyset) = 0$ ולכל סדרת קבוצות עולה $\{A_n\}_{\mathbb{N}}$ מתקיים:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

הראו כי μ הינה מידה.

שאלה 4

יהי $(\mathbb{X}, \mathbb{A})$ מרחב מדיד.

1. ותהי $a \in \mathbb{X}$. נגדיר: $\delta_a \colon \mathbb{A} \to [0,\infty]$ על ידי:

$$\delta_a(E) := \begin{cases} 1 & a \in E \\ 0 & a \notin E \end{cases}$$

הוכיחו כי δ_a היא מידה חיובית מעל $\mathbb{A}$.

2. תהי $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מידות חיוביות מעל $\mathbb{A}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מספרים ב $[0,\infty]$. לכל $E \in \mathbb{A}$ נגדיר:

$$\mu(E) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n(E)$$

הוכיחו כי μ מידה חיובית מעל $\mathbb{A}$.

שאלה 5

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות רציפות על הקטע $[0,1]$. הוכיחו כי הקבוצה:

$$A := \{x : \ f_n(x) \to 0\}$$

הינה בורלית (כלומר, שייכת לσ אלגברת בורל $\mathbb{B}([0,1])$).

שאלה 6

יהי $(X, \mathbb{S}, \mu)$ ממ"ח. ותהי $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קבוצות מדידות $\mathbb{S}$, עבורה מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$.
תהי F קבוצת כל האברים בX השייכים לאינסוף קבוצות בסדרה. הוכיחו כי $\mu(F) = 0$.

בהנאה!