

לינארית 2 מדעי המחשב פתרון מועד ב תשעו

1. בשאלה זאת נסמן את הבסיס הסטנדרטי של \mathbb{R}^4 ב $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

(א) נחשב, לפי הגדרה:

$$Te_1 = (1, 2, 2, -1)^t$$

$$Te_2 = (0, 2, 0, 2)^t$$

$$Te_3 = (1, 2, 2, -1)^t$$

$$Te_4 = (0, 2, 0, 2)^t$$

ולכן $A = [T]_E^E = [T]_E$ היא המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

כעת, הפולינום האופייני של A הוא

$$P_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda - 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \right| =$$

נחבר את השורות 1+2+3 לשורה הרביעית. פעולה זאת לא משנה את הדטרמיננטה

$$= \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda - 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ \lambda - 4 & \lambda - 4 & \lambda - 4 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 4) \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda - 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

נחסר את העמודה הרביעית מעמודה הראשונה וכן נעשה אותה מהעמודה השנייה ומעמודה השלישית ונקבל (בנוסף לפיתוח לפי שורה רביעית)

$$= (\lambda - 4) \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -2 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 4) \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \right| =$$

נחסר את העמודה הראשונה מהעמודה השלישית נקבל

$$= (\lambda - 4) \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ -2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda(\lambda - 4) \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| =$$

נחבר את שורה 3 לשורה 1 ונגיע למטריצה משולשית (תזכורת: דטר' של מטריצה משולשית היא מכפלה איברי האלכסון)

$$= \lambda(\lambda - 4) \left| \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2(\lambda - 4)(\lambda - 3)$$

(ב) מסעיף קודם נקבל 3 ע"ע $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$. נחשב ו"ע מתאימים:

i. עבור $\lambda_1 = 4$

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda_1=4} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ii. עבור $\lambda_2 = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda_2=3} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/3t \\ 0 \\ -2/3t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

iii. עבור $\lambda_3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda_3=0} = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ -t \\ s \\ t \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

כיוון שפ"א של A מתפרק לגורמים לינארית + לכל ע"ע הר"א-ר"ג נסיק כי A אלכסינה.
נגדיר

$$P = (v_1, v_2, v_3, v_4)$$

ונקבל

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 3 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = D$$

$$A = PDP^{-1} \text{ או באופן שקול}$$

.2

(א) נראה כי T ה"ל : לכל $f, g \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$T(\alpha f + g) = [\alpha f + g]'(0) = [\alpha f' + g'](0) = \alpha f'(0) + g'(0) = \alpha T(f) + T(g)$$

: $S = \{1, x, x^2\}$ וסיימונו. נחשב מטריצה מייצגת ל T לפי הבסיס הסטנדרטי

$$[T]_S^S = ([T(1)]_S, [T(x)]_S, [T(x^2)]_S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. $\dim \text{Im}(T) = \text{rank}(T) = \text{rank}([T]_S^S) = 1$ כי המטריצה מדורגת ורואים כי כעת, משפט הדרגה אומר כי

$$3 = \dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im} T$$

$$\dim \ker T = 3 - 1 = 2 \text{ ולכן}$$

(ב) הפ"א של T הוא

$$P_T(\lambda) = \left| \lambda I - [T]_S^S \right| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^3$$

ולכן $m_T(\lambda) = \lambda^i$ עבור $i \in \{1, 2, 3\}$. נבדוק

i. עבור $i = 1$ נקבל כי $[T]_S^S \neq 0$ ולכן אפשרות זאת נפסלת

ii. עבור $i = 2$ נקבל כי $([T]_S^S)^2 = 0$ ולכן זאת האפשרות הנכונה

כיוון ש $m_T(\lambda)$ אינו מתפרק לגורמים לינארים שונים ממעלה 1 נקבל כי T אינה לכסינה

(ג) הפ"מ $m_T(\lambda)$ חושב בסעיף הקודם והוא שווה ל λ^2

.3

(א) נוכיח כי זוהי מ"פ. לכל $f, g, h \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים

i. לינאריות ברכיב הראשון:

א.

$$\begin{aligned} \langle f + g, h \rangle &= (f + g)(0)h(0) + (f + g)(2)h(2) + (f + g)(-2)h(-2) = \\ &= [f(0) + g(0)]h(0) + [f(2) + g(2)]h(2) + [f(-2) + g(-2)]h(-2) = \\ &= f(0)h(0) + g(0)h(0) + f(2)h(2) + g(2)h(2) + f(-2)h(-2) + g(-2)h(-2) \\ &= [f(0)h(0) + f(2)h(2) + f(-2)h(-2)] + [g(0)h(0) + g(2)h(2) + g(-2)h(-2)] \\ &= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned} \langle \alpha f, h \rangle &= (\alpha f)(0)h(0) + (\alpha f)(2)h(2) + (\alpha f)(-2)h(-2) = \\ &= \alpha f(0)h(0) + \alpha f(2)h(2) + \alpha f(-2)h(-2) = \\ &= \alpha (f(0)h(0) + f(2)h(2) + f(-2)h(-2)) \\ &= \alpha \langle f, h \rangle \end{aligned}$$

ii. סמטריות:

$$\langle f, h \rangle = f(0)h(0) + f(2)h(2) + f(-2)h(-2) = h(0)f(0) + h(2)f(2) + h(-2)f(-2) = \langle h, f \rangle$$

iii. אי שליליות:

א.

$$\langle f, f \rangle = f(0)f(0) + f(2)f(2) + f(-2)f(-2) = [f(0)]^2 + [f(2)]^2 + [f(-2)]^2 \geq 0$$

ב.

$$\langle f, f \rangle = 0 \iff [f(0)]^2 + [f(2)]^2 + [f(-2)]^2 = 0 \iff f(0) = f(2) = f(-2) = 0$$

כיוון ש f פולינום מדרגה לכל היותר 2 זה מתקיים אמ"מ $f = 0$

[לפולינום מדרגה n ששונה מאפס יש לכל היותר n שורשים. אצלנו

יש 3 שורשים לפולינום שהוא מדרגה קטנה שווה 2]

(ב) נבצע תהליך גרם שמידט על הבסיס הסטנדרטי $S = \{v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2\}$ ונקבל קבוצה או"ג $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ שנגרמל-נחשב

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = x - \frac{0}{3} \cdot 1 = x$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = x^2 - \frac{8}{3} \cdot 1 - \frac{0}{8} x = -\frac{8}{3} + x^2$$

כעת נגרמל ($\|w_1\| = \sqrt{3}, \|w_2\| = \sqrt{8}, \|w_3\| = \sqrt{\frac{96}{9}}$) שימו לב לחישוב

$$\|w_3\|^2 = \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3} + 4\right)^2 + \left(-\frac{8}{3} + 4\right)^2 = \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{64 + 2 \cdot 16}{9} = \frac{96}{9}$$

ונקבל

$$\left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} x, u_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{96}{9}}} \left(-\frac{8}{3} + x^2\right) \right\}$$

בסיס או"ג.

(ג) נסמן $u = h$ ואת ההיטל ב $\Pi_W(u)$ [שימו לב כי $W = \text{span}\{u_1\}$] ונחשב

$$\Pi_W(u) = \langle u, u_1 \rangle u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 7 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3 \right) \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{11}{3}$$

(ד) לא כי תכונת האי שליליות אינה מתקיימת. למשל $f(x) = x(x-2)(x+2) \in \mathbb{R}_3[x]$ מקיים כי

$$\langle f, f \rangle = [f(0)]^2 + [f(2)]^2 + [f(-2)]^2 = 0$$

אך זהו אינו פולינום האפס.

4. נכון. כי מתקיים ש $\det(A), \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$ כי כל איברי מטריצות אלו שלמים. בנוסף מתקיים כי $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ נסמן $x = \det(A)$. מהנתונים נסיק כי $x, \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ המספרים היחידים המקיימים זאת הם $x = \pm 1$.

5. נכון. מהנתון

$$AA' = -A'A$$

ושימוש בעובדות ש $\det(AA') = \det(A)\det(A') = \det(A')\det(A)$ וגם ש $\det(-A'A) = (-1)^7 \det(A')\det(A)$ נקבל כי

$$\det(A')\det(A) = -\det(A')\det(A)$$

מה שמכריח $\det(A')\det(A) = 0$. כלומר $\det(A') = 0$ או $\det(A) = 0$ כלומר A' אינה הפיכה או ש A אינה הפיכה.

6. לא נכון, למשל $V = \mathbb{R}^2$ הוא מ"ז מעל \mathbb{R} מימד 2. נגדיר $S = \{e_1, e_2\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי ונגדיר את הפונקציות הבאות בעזרת משפט ההגדרה

$$T_1 e_1 = e_1, \quad T_1 e_2 = 0$$

$$T_2 e_1 = e_2, \quad T_2 e_2 = 0$$

$$T_3 e_1 = 0, \quad T_3 e_2 = e_2$$

נראה כי $T_1, T_2, T_3 \in W$ בת"ל בפרט $3 \leq \dim W$. אכן נניח $\sum_{i=1}^3 \alpha_i T_i = 0$ צ"ל כי $\alpha_j = 0$.

$$\left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i T_i \right) (e_2) = 0(e_2)$$

באגף ימין נקבל 0 ובאגף שמאל נקבל $\alpha_3 T_3 e_2 = \alpha_3 e_2$ כלומר קיבלנו

$$\alpha_3 e_2 = 0$$

כיוון ש $e_2 \neq 0$ (כי הוא איבר בבסיס ל V) נקבל כי $\alpha_3 = 0$. נשארנו עם $\sum_{i=1}^2 \alpha_i T_i = 0$

$$\left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i T_i \right) (e_1) = 0(e_1)$$

באגף ימין נקבל 0 ובאגף שמאל נקבל $\alpha_1 T_1 e_1 + \alpha_2 T_2 e_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ כלומר קיבלנו

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$$

כיוון ש e_1, e_2 בסיס נקבל שגם

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

7. לא נכון. למשל למטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

יש 2 ע"ע ששניהם שווים 1.

8. נכון. הוכחה: יהא $v \in V_\lambda \cap V_\mu$ צ"ל כי $v = 0$. אכן, מהנתונים נקבל כי

$$(Av = \lambda v) \wedge (Av = \mu v)$$

נחסר בין 2 המשוואות ונקבל כי

$$0 = \lambda v - \mu v = (\lambda - \mu)v$$

כיוון ש $\lambda \neq \mu$ נקבל כי $\lambda - \mu \neq 0$ ולכן $v = 0$ כנדרש.

9. לא נכון. למשל

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי

$$A = P^{-1}A'P = PA'P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לשתיים יש ע"ע יחיד שהוא 0 עם וקטור עצמי בודד אבל:

ל A' הוקטור העצמי המתאים הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ואילו

ל A הוקטור העצמי המתאים הוא $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. נכון. נתון כי $A^k = 0$ וגם $A^{k-1} \neq 0$ עבור $k \in \mathbb{N}$. למטריצה זאת יש ע"ע יחיד 0 עם פ"מ $m_A(x) = x^k$. כיוון ש A לכסינה אזי הפ"מ מתפרק לגורמים לינארים שונים מדרגה 1 ולכן $k = 1$. מה שאומר ש $A^k = A = 0$.

11. נכון. נתון כי קיימות D אלכסונית ו P הפיכה כך ש

$$P^{-1}AP = D$$

במעבר פשוט מקבלים כי

$$A = PDP^{-1}$$

ולכן

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

ובמעבר פשוט

$$P^{-1}A^2P = D^2$$

כיון ש D אלכסונית גם D^2 כזאת. מכאן ש A^2 לכסינה.

12. לא נכון. למשל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

לכסינה אבל הפולינום האופייני הוא $p_A(x) = x^2$ ואילו הפולינום המינימאלי הוא $m_A(x) = x$

13. לא נכון. למשל הפ"מ של

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שווה ל x^2 אבל אין להם אותה צורת זורדן (A, A' כבר בצורת זורדן והם אינם שוות)

14. נכון מעל הממשיים ולא מעל המרוכבים. למה? כי בכל ממ"פ מתקיים

$$\|v + u\|^2 = \langle v + u, v + u \rangle = \|v\|^2 + \|u\|^2 + \langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle$$

לפי הנתון כי $\|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$ נקבל כי $\langle v, u \rangle + \langle u, v \rangle = 0$. בשימוש בהגדרת מכפלה פנימית נמשיך לכך ש $2\operatorname{Re}(\langle v, u \rangle) = \langle v, u \rangle + \overline{\langle v, u \rangle} = 0$ בחילוק ב 2 נקבל כי

$$\operatorname{Re}(\langle v, u \rangle) = 0$$

כעת, אם זהו ממ"פ מעל הממשיים נקבל כי $\langle v, u \rangle = \operatorname{Re}(\langle v, u \rangle) = 0$ ואז u, v מאונכים.

אך אם זהו ממ"פ מעל המרוכבים

ניתן לקחת את הוקטורים $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ (בממ"פ \mathbb{C}^2) שאינם מאונכים זה לזה אך מתקיים

$$\|v + u\|^2 = 2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$$

15. לא נכון. למשל $V = \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית מתקיים כי $u = e_1$ אורתוגונאלי ל $v = e_2$ וגם $v = e_2$ אורתוגונאלי ל $w = e_1$ אך u אינו אורתוגונאלי ל w (כאשר $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)