

מבנים אלגבריים (89-214)

מרצה: ד"ר מיכאל משה שיין

תשע"ג סמסטר א'

מבחן מסכם, מועד א'

יש לענות על כל השאלות. יש לנמק באופן מלא את כל הטענות שלך. כל חומר עזר אסור. משך הבחינה: שעתיים וחצי. בהצלחה!

1. תהי G הקבוצה של שלישיות של מספרים שלמים, עם פעולה בינארית שמוגדרת כך:

$$(k_1, k_2, k_3) \cdot (l_1, l_2, l_3) = (k_1 + (-1)^{k_3} l_1, k_2 + l_2, k_3 + l_3)$$

הוכח שזו חבורה וכי התת-חבורה $\langle (1, 0, 0) \rangle$ הינה נורמלית.

2. תהי G חבורה סופית, מספר ראשוני p . הוכח שהסדר של G הינו חזקה של p אם ורק אם הסדר של כל איבר $g \in G$ הינו חזקה של p .

3. תהי G חבורה, $H \subseteq G$ תת-חבורה. תהי C קוסט משמאל של H . הוכח שלכל $a, b, c \in C$ מתקיים $ab^{-1}c \in C$.

4. תהי G חבורה סופית ונניח שהמרכז $Z(G)$ הינו תת-חבורה מאינדקס n . הוכח שבכל מחלקת צמידות של G יש לא יותר מ- n איברים.

5. תהי G חבורה אבלית ויהי $f : G \rightarrow \mathbb{Z}$ אפימורפיזם. הוכח שקיימת תת-חבורה $H \subseteq G$ כך ש- $H \cong \mathbb{Z}$ ומתקיים $G \cong H \times (\ker f)$.