אינטגרל לא אמיתי ①

(אינטגרל סוג I) **הגדרה:** תהי $f(x)$ פונק' רציפה בקטע $[a,\infty)$

נגדיר $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ע"י

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^k f(x)\,dx$$

אחרת נאמר שהוא מתבדר

אם הגבול קיים וסופי (נאמר ש-האינטגרל מתכנס.

באופן דומה מגדירים: $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{k\to-\infty} \int_k^a f(x)\,dx$

עבור פונק' f הרציפה ב- $[a,\infty)$ ו- $(-\infty,a]$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx \quad (*)$$

לסיכום: האינטגרל $(*)$ מתכנס אם $\int_{-\infty}^a$ ___ מתכנס

ו- $\int_a^\infty$ ___ מתכנס עבור כל a בנפרד.

דוגמה (חשובה): אם $\alpha\neq-1$

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^\alpha\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\alpha+1}\left(t^{\alpha+1}-1\right) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1} & \alpha<-1 \\ \infty & \alpha>-1 \end{cases}$$

אם $\alpha=-1$ (גם)

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

מסקנה: עבור $\alpha>1$ האינטגרל $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ מתכנס ועבור $\alpha\le1$ הוא מתבדר.

דוגמה:

$$\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$$

פתרון:

$$\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{k\to\infty}\int_2^k \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$$

נציב $t=x^2-3$ $\quad dt=2x\,dx$ כאשר ל-

גבולות האינטגרציה המתאימים הם $t=1$ $\quad t=k^2-3$

$$\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{k\to\infty}\int_2^k \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = \lim_{k\to\infty}\int_1^{k^2-3}\frac{dt}{2t^{3/2}} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}(-2)t^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^{k^2-3} = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{k^2-3}}+1\right) = 1$$

שאלה: חשב את האינטגרל

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3}$$

פתרון:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3} = \lim_{k\to\infty}\int_1^k \frac{dx}{x+x^3}$$

נחשב קודם את האינטגרל הלא מסוים: $\int \frac{dx}{x+x^3}$

$$\int \frac{dx}{x+x^3} = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}\right)dx$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \Rightarrow 1 = (1+x^2)A + (Bx+C)x$$

ע"י השוואת מקדמים נקבל:

$$A+B=0$$

$$C=0 \quad A=1 \quad B=-1$$

$$\int \frac{dx}{x+x^3} = \int\left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right]dx = \int\frac{dx}{x} - \int\frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{t}$$

כאשר $dt = 2x\,dx$ $t = 1+x^2$ ולכן

$$\int \frac{dx}{x+x^3} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|t| + C = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

נחזור לאינטגרל הלא אמיתי:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^3} = \lim_{k\to\infty}\int_1^k \frac{dx}{x+x^3} = \lim_{k\to\infty}\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right)\Big|_1^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\Big|_1^k = \lim_{k\to\infty}\ln\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \ln(1) - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln 2$$

<u>דוגמה:</u> $\int_0^\infty x\sin(x)\,dx$

<u>פתרון:</u> נחשב את האינטגרל הלא מסוים

ע"י שיטת אינטגרציה בחלקים:

$$u' = \sin x\,dx \qquad v = x$$
$$u = -\cos x \qquad dv = 1\cdot dx$$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos(x) + \sin x + c$$

ולכן

$$\int_0^\infty x\sin(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_0^k x\sin(x)\,dx =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(-x\cos(x)+\sin x\right)\Big|_0^k = \lim_{k\to\infty}\left(-k\cos k+\sin k\right)$$

הגבול לא קיים ולכן האינטגרל מתבדר:

<u>אינטגרל לא אמיתי מסוג שני</u>

תהי f רציפה ולא חסומה בקטע $[a,b)$ $(a<b)$

נגדיר $\int_a^b f(x)\,dx$ ע"י

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\,dx$$

באופן דומה נגדיר:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a}\int_t^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ולכל אחת f רציפה ולא חסומה בקטע (a,b)

כאשר $a<c<b$ (כלומר f רק לא לא חסומה

בסביבת רק $x=a$ או $x=b$).

<u>דוגמה:</u> חשבו את האינטגרל:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

<u>פתרון:</u>

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^2 dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$\cancel{\lim_{t\to 0}\int_t^1 x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1 =}$ $\cancel{\alpha\neq -1}$

$\cancel{\int_0^1 x^{\alpha}\,dx = \lim_{t\to 0}\int_t^1 x^{\alpha}\,dx = \lim_{t\to 0}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_t^1 = \frac{1}{\alpha+1}-\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \begin{cases}\frac{1}{\alpha+1} & \alpha>-1\\ \infty & \alpha<-1\end{cases}}$ $\cancel{\alpha\neq -1}$

$\cancel{\alpha=1}$ סופי

$\cancel{\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0}\ln x\Big|_t^1 = -\ln t = \infty}$

$\cancel{1<\alpha}$ $\cancel{\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx}$

(5)

מבחני התכנסות לאינטגרל מסוג I

מבחן ההשוואה הראשון:

אם מתקיים $0\le f(x)\le cg(x)$ עבור 2 פונק' א'

~~ועבור (כלומר =0 ∀ $x>M$ עבור M מסוים), אז:~~

1) התכנסות g גוררת התכנסות f

2) התבדרות f גוררת התבדרות g

הער: כידוע שבקטע $[a,\infty)$ אינטגרל של $\frac{1}{x}$ מתבדר ואינטגרל $\frac{1}{x^2}$ מתכנס ולכן כדאי לנסות להשוות אליהם.

דוגמה 1: בדוק התכנסות של האינטגרלים הבאים:

a) $\int_1^\infty x^{-x}\,dx$

פתרון:

$$\int_1^\infty x^{-x}\,dx=\int_1^2 x^{-x}\,dx+\int_2^\infty x^{-x}\,dx$$

מכיוון שהאינטגרל $\int_1^2 x^{-x}dx$ קיים (סופי), נשאר להראות ש $\int_2^\infty x^{-x}dx$ מתכנס.

לכל $x\ge 2$ מתקיים: $\frac{1}{x^x}\le\frac{1}{x^2}$ ומכיוון ש: $\int_2^\infty x^{-2}dx$ מתכנס, לכן ממבחן ההשוואה הראשון שגם האינטגרל $\int_2^\infty x^{-x}dx$ מתכנס.

b) $\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{x}\,dx$

פתרון: מכיוון ש $-1\le\sin x\le 1$ לכן ש $1\le 2+\sin x$

$\Leftarrow$ $\frac{1}{x}\le\frac{2+\sin x}{x}$. ומכיוון ש $\int_1^\infty\frac{1}{x}dx$ מתבדר, לכן נקבל ש $\int_1^\infty\frac{2+\sin x}{x}$ מתבדר.

מבחן ההשוואה השני (הגבולי)/מבחן המנה

אם $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ ופונקציות חיוביות, אזי:

1. אם $0<c<\infty$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.
2. אם $c=0$ התכנסות g גוררת התכנסות של f (טורק גם חבריו) התבדרות של f גוררת התבדרות של g.
3. אם $c=\infty$ — התכנסות של f גוררת התכנסות של g. התבדרות של g גוררת התבדרות של f.

שאלה: בדוק בעזרת מבחן המנה האם האינטגרלים הבאים מתכנסים!

א. $\int_2^\infty \frac{x+7}{\sqrt{x^5-3x}}\,dx$

פתרון: $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ מתכנס.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+7}{\sqrt{x^5-3x}}\cdot\frac{x\sqrt{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x^5-3x}} = 1$$

לכן גם האינטגרל שלנו מתכנס.

ב. $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

פתרון: ידוע לנו שלכל $0\le\alpha\le\pi$, $0\le\sin\alpha$ לכן לכל $x\ge 1$ (ובפרט ש) $0\le\sin\frac{1}{x}$

$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ מתבדר. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$ ולמבחן

המנה, אז $\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ מתבדר.

ג. $\int_1^\infty \left(\ln(1+e^x)-x\right)dx$

פתרון:

נשים לב ש: $\ln(1+e^x)-x=\ln(1+e^x)-\ln e^x = \ln\frac{1+e^x}{e^x}$

~~בהשוואה~~ כיוון ש $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס. נחשב

את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{-x}+1)}{\frac{1}{x^2}}$

נפעיל לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{-x}+1)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\cdot e^{-x}}{2(e^{-x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2(1+e^x)}=0$$

ממבחן הגבול ודרך שה-התכנסות $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$

מתכנס גם $\int_1^\infty (\ln(1+e^x)-x)dx$

<u>מבחן דיריכלה:</u>

אם $g(x)$ רציפה ובעלת את"ק $|\int_a^b g(x)dx|<c$

לכל $b>a$, $f(x)$ מונוטונית, גזירה ברציפות,

יורדת לאפס (כאשר $x\to\infty$), אז' $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$

מתכנס.

<u>הערה:</u> כאן הוא דרוש עבור f,g לפי מה

שוויון. הטענה התכנסות של

<u>דוגמאות:</u> ~~תוספת של~~ האינטגרלים הבאים

שאלה. $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$

כיוון ש: $\left|\int_a^b \sin x\,dx\right|=|-\cos(b)+\cos(a)|\le 2$

לכל $a,b\in\mathbb{R}$ וגם $\frac{1}{x}$ מונוטוני, גזירה ברציפות,

יורדת לאפס => מהמבחן שלנו מתכנס לפי דיריכלה.

8

ה. $\int_0^\infty x^2 \sin x^4 \, dx$

<u>פתרון:</u> נפצל את האינטגרל (נראה כל אחד לבד):

$$\int_0^\infty x^2 \sin x^4 \, dx = \int_0^1 x^2 \sin x^4 \, dx + \int_1^\infty x^2 \sin x^4 \, dx$$

האינטגרל הראשון הוא אינטגרל רגיל (רציף ד"מ)

במקרה האינטגרל השני נציב $t = x^4$ כלומר

$dt = 4x^3 dx$ ולכן:

$$\int_1^\infty x^2 \sin x^4 \, dx = \int_1^\infty \frac{\sin t}{x} dt = \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin t}{4\sqrt{t}} dt}_{\text{מתכנס לפי מבחן דיריכלה}}$$

ו. $\int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x} dx$

<u>פתרון:</u> נשתמש בזהות: $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$$\int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x} dx}_{\text{מתכנס לפי דיריכלה}}$$

<u>מבחני ההשוואה עבור אינטגרל מסוג שני</u>

<u>משפט:</u> אם $0 \le f(x) \le g(x)$ ב $(a,b]$ ולא חסומות בסביבה ימנית של a, אזי:

1. אם $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס אזי גם $\int_a^b f(x)dx$

2. אם $\int_a^b f(x)dx$ מתבדר אזי גם $\int_a^b g(x)dx$

<u>דוגמה:</u> בקטע $(0,1]$ ידוע ש $\frac{1}{x^\alpha}$ מתבדר אם $\alpha \ge 1$ ומתכנס אם $1 > \alpha > 0$, כלומר הם דוקא בדיוק הפוך לקטע $[1,\infty)$

3 שאלות:

1. קבע האם מתכנס $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

מתכנס.

פתרון: נחלק את התחום לשניים: $[1,2]$, $[2,\infty)$

עבור $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ נשווה עם $\frac{1}{x^{3/2}}$ שמתכנס.

עבור $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ נשווה עם $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ שמתכנס.

2. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$

פתרון: שוב נחלק את התחום לשניים: $[0,\frac12]$, $[\frac12,1]$.

נשים לב ש: $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-2x}=-\frac12$

זהו אמיתי לכן קיים (סופי).

נבדוק התכנסות האינטגרל: $\int_0^{1/2}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$

מספיק לבדוק האם האינטגרל $\int_0^{1/2}-\frac{\ln x}{1-x^2}dx$ מתכנס.

$$\int_0^{1/2}-\ln x\,dx=\left[-x\ln x+x\right]_0^{1/2}=\lim_{a\to 0}\left[-\frac12\ln\frac12+\frac12+b\ln b-b\right]=$$
$$=-\frac12\ln\frac12+\frac12$$

ז"א האינטגרל $\int_0^{1/2}-\ln x\,dx$ מתכנס.

$-\frac{\ln x}{1-x^2}>0$ לכל $0\le x\le\frac12$ ולכן אי-שליליות

משפט ההשוואה הראשון.

לכל $0\le x\le\frac12$ מתקיים $\frac{-\ln x}{1-x^2}\le\frac{-4\ln x}{3}$

מכיוון ש $\int_0^{1/2}-\ln x\,dx$ מתכנס, ולכן גם $\int_0^{1/2}\frac{-4\ln x}{3}dx$ מתכנס

ממבחן ההשוואה הראשון נקבל ש: $\int_0^{1/2} \frac{-\ln x}{1-x^2}dx$ מתכנס

ולכן $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ מתכנס.

<u>מבחן הגבול (מבחן ההשוואה השני / הגבולי)</u>

אם $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ אז:

1. $0<c<\infty$ מתכנסים/מתבדרים ביחד.
2. $c=0$ התכנסות g גוררת התכנסות של f. התבדרות של f גוררת התבדרות של g.
3. $c=\infty$ התכנסות של f גוררת התכנסות של g. התבדרות של g גוררת התבדרות של f.

<u>דוגמה:</u> לאילו ערכי α מתכנסים האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}dx$

<u>פתרון:</u> נבצע מבחן השוואה עם $\frac{1}{x^{\alpha-2}}$

לפי לופיטל

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1$$

היות ו $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}dx$ מתכנס $\iff \alpha<3$ אז

גם האינטגרל שלנו מתכנס באותם ערכים.

ב. $\int_0^1 |\ln(x)|^\alpha dx$

עבור $\cancel{\alpha\le 0}$ $\alpha>0$ נבצע השוואה עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$

ונקבל:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\ln(x)|^\alpha}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,|\ln(x)|^\alpha = 0$$

עבור $\alpha=0$ ברור ש- האינטגרל

מתכנס

עכשיו כשα ורק שהאינטגרל עבור לא מתאים
להפוך הטע"ה ב 1. (בעיקר 0 בשלול) תמיד.
אפשר לראות את האינטגרל כ:

$$\int_0^1 \frac{1}{|\ln(x)|^\beta}dx$$

כאשר $\beta=-\alpha>0$.

נשתמש בהגדרה - במ"א:

$$\int_a^1 \frac{dx}{|\ln(x)|^\beta}$$

כאשר $\alpha>0$ (נעזר השוואה) עם $\frac{1}{x|\ln x|^\beta}$

והגבול

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x|\ln x|^\beta}{|\ln(x)|^\beta} = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

את האינטגרל הזה:

$$\int_a^1 \frac{1}{x|\ln(x)|^\beta}dx = \int_a^1 \frac{1}{x(-\ln x)^\beta}dx$$

זה להוכיח, נציב $t=-\ln x$ ואז $dt=-\frac{1}{x}dx$

$$\int_a^1 \frac{1}{x(-\ln(x))}dx = -\int_{-\ln a}^{0} \frac{1}{t^\beta}dt = \int_0^{-\ln a} \frac{1}{t^\beta}dt$$

האינטגרל הזה מתכנס כאשר $\beta<1$. לסיכום
האינטגרל המקורי מתכנס כאשר $\alpha>-1$.

הפתרון כן לכתוב את האינטגרל, נגם סכום של
אינטגרל מסוג I ואינטגרל מסוג II ולבדוק:

פתרונות:

A.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\cos x}\sin(\tan(x))dx$$

פתרון: נציב: $\tan x = t$

$x=\arctan t$ $\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$ $\quad \frac{1}{\cos^2 t}=t^2+1$

$g(t)=\frac{\arctan t}{\sqrt{t^2+1}}$ $f(t)=\sin(t)$ ~~ואז~~

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\cos x} \sin(\tan x)\, dx = \int_0^{\infty} \sin t \cdot \frac{\arctan t}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$$ (12)

נסמן: $f(t) = \sin t$ $\qquad g(t) = \dfrac{\arctan}{\sqrt{t^2+1}}$

$g(t)$ מונוטונית יורדת ל-0 כי $\lim_{t\to\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = 0$$

$g(t)$ מונוטונית יורדת החל מ-t_0 מסויים

$$g'(t) = \frac{\frac{1}{1+t^2}\sqrt{1+t^2} - \arctan t \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{t^2+1} = \frac{1-\cancel{t}\arctan t}{(t^2+1)^{3/2}} < 0$$

לכאורה לפי מבחן דיריכלה מתקיים לכן האינטגרל מתכנס.

שאלות למבחן חזרה

(1)

~~30~~

.א
$$\int_0^1 \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}\,dx$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}=\infty$$

ולכן הוא אינטגרל לא אמתי

נפרק את המכנה $\sqrt[5]{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{(1-x)(1+x+x^2)}}}{\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}}}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{(1+x+x^2)}}=$$

$$=\frac{\sin 1+\cos 1}{\sqrt[5]{3}}\neq 0 \quad <\infty$$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{1-x}}\,dx$ ~~[illegible]~~ - ולכן מהתכנסות ש

ונובע התכנסות של

האינטגרל שלנו.

.ב
$$\int_0^1 \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[4]{x}-\sin x}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}=\infty$$

ג"כ האינטגרל הוא אינטגרל לא אמתי

נשווה עם $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[4]{x}\cos x}{\underbrace{\sqrt[4]{x}-\sin x}_{\simeq 1}}=\lim_{x\to0^+}\cancel{\frac{\sqrt[4]{x}\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{\sqrt[4]{x}\left(1-x+o(x)\right)}}=1$$